ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΟΔΗΓΙΕΣ

ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (ΕΠΑ.Λ.)

ΚΑΤΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2009-10

Οι παρούσες οδηγίες - με εξαίρεση τα Μαθηματικά Ι της Γ΄ ΕΠΑ.Λ.- αποτελούν προσαρμογή των οδηγιών των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου των αντίστοιχων τάξεων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΚΟΠΟΙ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Ο γενικός σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι:

α) Η μεθοδική άσκηση του μαθητή στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες, καθώς και η μύηση στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία.

β) Η γενικότερη πνευματική καλλιέργεια και η συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή, καθόσον τα Μαθηματικά αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την πειθαρχημένη σκέψη και συμπεριφορά, καλλιεργούν το αίσθημα του ωραίου και του ηθικού και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.

γ) Η ανάπτυξη ικανότητας για την ακριβή σύλληψη των εννοιών, των μεγεθών, των ιδιοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων και ιδιαιτέρως εκείνων που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση προβλημάτων της σύγχρονης ζωής και για την επαφή με τη σύγχρονη τεχνική, οικονομική και κοινωνική πραγματικότητα.

δ) Ο εθισμός των μαθητών στη διατύπωση των διανοημάτων με τη χαρακτηριστική στη μαθηματική γλώσσα τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια, αυστηρότητα, λιτότητα και κομψότητα.

ε) Η κατανόηση του ρόλου των Μαθηματικών στους διάφορους τομείς της γνώσης και η επαρκής προπαρασκευή των μαθητών για τη συνέχιση των σπουδών τους.

Ειδικότερα, με τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο **Λύκειο**, επιδιώκεται:

α) Να εμπεδωθούν και να διερευνηθούν σε θεωρητικότερο επίπεδο οι γνώσεις που απόκτησαν οι μαθητές στο Γυμνάσιο.

β) Να μυηθούν και να εξοικειωθούν οι μαθητές στη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και να καλλιεργηθεί η «μαθηματική σκέψη»,

γ) Να ασκηθούν οι μαθητές στο να χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως γνώση, αλλά και ως μέθοδο σκέψης και πράξης στην καθημερινή ζωή.

δ) Να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με τις ποικίλες εφαρμογές των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες και στη σύγχρονη πραγματικότητα.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Σε κάθε ώρα διδασκαλίας των Μαθηματικών πρέπει να κυριαρχεί η προσωπική εργασία των μαθητών. Η τάξη πρέπει να είναι ένας τόπος, όπου οι μαθητές δεν θα είναι παθητικοί δέκτες, αλλά θα εξερευνούν καταστάσεις, θα ανακαλύπτουν νέες γνώσεις και θα προσπαθούν να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν τις γνώσεις που απόκτησαν. Κάθε διδασκαλία πρέπει να προχωρεί από το γνωστό στο άγνωστο, από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο και από το απλό στο σύνθετο.

Η σωστή προετοιμασία, η θεωρητική κατάρτιση και ο συνεχής προβληματισμός του διδάσκοντος αποτελούν απαραίτητα στοιχεία για μια επιτυχή διδασκαλία. Γι ' αυτό ο διδάσκων πρέπει στην αρχή του διδακτικού έτους να μελετήσει προσεκτικά καθένα από τα διδακτικά βιβλία που θα διδάξει και τις αντίστοιχες διδακτικές οδηγίες.

Έτσι, θα ενημερωθεί για το περιεχόμενο της διδασκαλίας του και για το «τι πρέπει να μάθει» ο μαθητής από τη διδασκαλία μιας συγκεκριμένης ενότητας, που χωρίς αμφιβολία είναι βασική προϋπόθεση για την επιτυχή οργάνωση της διδασκαλίας της ενότητας αυτής.

Πιο συγκεκριμένα, οι διδάσκοντες πρέπει να έχουν υπόψη τους και τα εξής:

1. Κατά τη διδασκαλία πρέπει να χρησιμοποιούνται οι τελευταίες εκδόσεις των διδακτικών βιβλίων και να επιδιώκεται η ολοκλήρωση της διδασκαλίας της διδακτέας ύλης.
2. Η εμμονή σε ενότητες που ανήκουν μάλλον στην «ιστορία των Μαθηματικών» και η επιλογή πολύπλοκων ασκήσεων, όχι μόνο δε συμβάλλει στην επίτευξη των σκοπών της διδασκαλίας, αλλά αντίθετα οδηγεί στη «μαθηματικοφοβία», ενώ παράλληλα επιβραδύνει το ρυθμό της διδασκαλίας. Έτσι δε μένει χρόνος για τη διδασκαλία άλλων ενοτήτων, οι οποίες είναι χρήσιμες αν όχι απαραίτητες, για όλους τους μαθητές, ανεξάρτητα από τη δέσμη που θα ακολουθήσουν.
3. Ένας από του βασικούς στόχους της διδασκαλίας είναι η εξοικείωση με το λογισμό και η ανάπτυξη των σχετικών με αυτόν δεξιοτήτων του μαθητή. Όμως, για την επίτευξη του στόχου αυτού δεν πρέπει να σπαταλάται πολύτιμος χρόνος με εκτέλεση πολύπλοκων αριθμητικών ή αλγεβρικών υπολογισμών. Γενικά η αντιμετώπιση από το μαθητή τέτοιων περιπτώσεων (δύσκολες ή εξεζητημένες ασκήσεις που υπερβαίνουν τη δυνατότητά του) έχει ελάχιστη χρησιμότητα στην προαγωγή του μαθηματικού τρόπου σκέψης και αντιβαίνει στη σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών. Αντίθετα απογοητεύει τους μαθητές, καλλιεργεί σ' αυτούς ένα αίσθημα αποστροφής προς τα Μαθηματικά και τους δημιουργεί την εντύπωση ότι η κατανόηση των Μαθηματικών προϋποθέτει ειδικές ικανότητες.
4. Ο μαθητής πρέπει να συνηθίσει στο να εκφράζεται με σαφήνεια, ακρίβεια και πληρότητα. Έτσι, πρέπει να καταβληθεί προσπάθεια για την ευχερέστερη, ανετότερη και ταχύτερη κίνηση της σκέψης. Με το συμβολισμό αποφεύγεται η χρήση λέξεων, των οποίων η σημασία έχει γίνει αμφίβολη και ρευστή από την κοινή χρήση. Δεν πρέπει όμως να γίνεται κατάχρηση συμβολισμού. Θα χρησιμοποιούνται με προσοχή και φειδώ μόνο εκείνα τα σύμβολα που αναφέρονται στο διδακτικό βιβλίο. Σε καμία περίπτωση ο συμβολισμός δεν πρέπει να ενισχύει τη «σπουδαιοφάνεια» και την τάση «τα εύκολα να γίνονται δύσκολα».

5. Κατά την εισαγωγή νέων μαθηματικών όρων, όπως π.χ. μειωτέος, διαιρετέος, εφαπτομένη, συμμετρία κτλ. είναι σκόπιμο να αναφερόμαστε, όσο είναι δυνατό, και στην ετυμολογική σημασία τους, παράλληλα με τη λειτουργική σημασία που έχουν στα Μαθηματικά. Με αυτό τον τρόπο βοηθούμε το μαθητή στην κατανόηση, στη συγκράτηση και στην ορθή εννοιολογική χρήση των όρων
6. Είναι γνωστή η παιδαγωγική αξία των σχημάτων και γενικότερα των εποπτικών εικόνων, γι' αυτό συνιστάται, όταν προσφέρεται η διδακτική ενότητα, η χρησιμοποίηση σχημάτων, πινάκων κτλ. γιατί έτσι γίνονται κατανοητές και ερμηνεύονται καλύτερα οι έννοιες που πραγματεύεται η ενότητα.

   Ιδιαίτερα στις γυμνασιακές τάξεις πρέπει να γίνεται συστηματική χρήση των εποπτικών μέσων. Το ψαλίδι, το διαφανές χαρτί, τα γεωμετρικά όργανα και το τετραγωνισμένο χαρτί πρέπει να χρησιμοποιούνται σε κάθε βήμα της διδακτικής πορείας. Τα εποπτικά μέσα και οι κάθε είδους μετρήσεις και πειραματισμοί πρέπει να μιλούν περισσότερο από το διδάσκοντα και να είναι αναπόσπαστα στοιχεία της μαθητικής εργασίας.
7. Τα παραδείγματα που περιέχονται σε κάθε διδακτικό βιβλίο, έχουν ως σκοπό την καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση της ενότητας στην οποία αναφέρονται. Ο διδάσκων θα κρίνει κάθε φορά, πόσα και ποια απ' αυτά θα χρησιμοποιήσει για την επίτευξη του σκοπού αυτού. Είναι προφανές ότι ο διδάσκων, αν το κρίνει σκόπιμο, μπορεί να χρησιμοποιήσει και άλλα παραδείγματα, τα οποία ανταποκρίνονται περισσότερο στα ιδιαίτερα γνωρίσματα της τάξης του (περιοχή στην οποία βρίσκεται το σχολείο, κοινωνικό περιβάλλον, επίπεδο γνώσεων, ενδιαφέροντα μαθητών κτλ.)
8. **Οι εφαρμογές** και **τα παραδείγματα** των βιβλίων μπορούν να χρησιμοποιούνται ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων, αλλά **δεν εξετάζονται** ούτε ως θεωρία, ούτε ως ασκήσεις. Γενικότερα οι εφαρμογές και τα παραδείγματα δεν αποτελούν εξεταστέα ύλη στις γραπτές εξετάσεις. Επίσης, στα θέματα θεωρίας των γραπτών εξετάσεων, δεν πρέπει να ζητούνται οι αποδείξεις των προτάσεων που αναφέρονται στο βιβλίο χωρίς απόδειξη. Τέλος, το επαναληπτικό μέρος του βιβλίου που ανήκει σε πρόγραμμα προηγούμένων τάξεων, δεν αποτελεί εξεταστέα θεωρία. Η ύλη αυτή μπορεί βέβαια να χρησιμοποιείται στις αποδείξεις θεωρημάτων και στη λύση ασκήσεων.
9. Σε κάθε βιβλίο υπάρχει μεγάλη ποικιλία ασκήσεων από διάφορους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, που καλύπτουν ένα μεγάλο φάσμα των δυνατοτήτων των μαθητών. Ο διδάσκων πρέπει κατά τη διδασκαλία μιας ενότητας να λαμβάνει υπόψη τις ατομικές διαφορές των μαθητών και τα ιδιαίτερα γνωρίσματα που μπορεί να έχει η τάξη του και κάθε φορά να επιλέγει τις κατάλληλες ασκήσεις τόσο για την κατανόηση της ενότητας, όσο και για την περαιτέρω εμβάθυνσή της. Είναι βέβαια επιθυμητό, στα πλαίσια ενός ορθολογικού προγραμματισμού της διδασκαλίας στο διαθέσιμο χρόνο, να μπορούν να λυθούν στην τάξη ή στο σπίτι όσο το δυνατόν περισσότερες από τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου.

   Η πραγματοποίηση τού στόχου αυτού, σε καμιά περίπτωση δεν πρέπει να αποβεί σε βάρος της ολοκλήρωσης .της διδασκαλίας της διδακτέας ύλης.

   Επισημαίνεται ότι **οι γενικές ασκήσεις και οι ασκήσεις Γ΄ ομάδας** στο τέλος των κεφαλαίων και στο τέλος των βιβλίων, καθώς και τα θεωρητικά θέματα που υπάρχουν στα παραρτήματα των βιβλίων προορίζονται για μαθητές με ιδιαίτερο ενδιαφέρον και δυνατότητες στα Μαθηματικά. Για το λόγο αυτό **δεν αποτελούν ύλη για εξέταση** στις προφορικές ή γραπτές εξετάσεις των μαθητών.
10. **Η επεξεργασία των ασκήσεων πρέπει να στηρίζεται σε «γνωστές» προτάσεις.** Τέτοιες είναι όσες περιέχονται στη διδακτέα θεωρία και στις αντίστοιχες εφαρμογές που περιλαμβάνονται στα εγκεκριμένα διδακτικά βιβλία. Κάθε άλλη πρόταση που χρησιμοποιείται για τη λύση μιας άσκησης, πρέπει προηγουμένως να αποδεικνύεται. Κάθε απόδειξη (Θεωρήματος ή άσκησης)

εφόσον στηρίζεται σε γνωστές προτάσεις είναι δεκτή, έστω και αν διαφέρει από εκείνη που υπάρχει στο διδακτικό βιβλίο.

11. Κάθε βιβλίο Μαθηματικών συνοδεύεται από ξεχωριστό τεύχος με τις λύσεις των ασκήσεων. Πρέπει να καταβληθεί ιδιαίτερη προσπάθεια από τους διδάσκοντες για τη σωστή χρησιμοποίησή του από τους μαθητές. Σχετικό προλογικό σημείωμα υπάρχει σε κάθε τεύχος λύσεων και είναι ανάγκη να αναλυθεί στους μαθητές το περιεχόμενό του.
12. Στο τέλος των περισσοτέρων κεφαλαίων των βιβλίων υπάρχουν **ιστορικά σημειώματα** που έχουν σκοπό να διεγείρουν το ενδιαφέρον και την αγάπη των μαθητών για τα Μαθηματικά και να τους πληροφορήσουν για την ιστορική πορεία της μαθηματικής σκέψης. Η αξιοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων στη διδασκαλία εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις πρωτοβουλίες και ιδέες που θα αναπτύξουν οι διδάσκοντες. Μια πρόταση που έχει με επιτυχία δοκιμαστεί πειραματικά σε άλλες χώρες, είναι διάθεση μιας διδακτικής ώρας μετά την ολοκλήρωση της ύλης ενός Κεφαλαίου, για τη μελέτη του αντίστοιχου ιστορικού σημειώματος και ελεύθερη συζήτηση στην τάξη. Με αυτή την προοπτική έχουν γραφτεί ιδιαίτερα τα ιστορικά σημειώματα για τη λογαριθμική συνάρτηση στο βιβλίο της Άλγεβρας της Β' Λυκείου.
13. Κατά τη διδασκαλία της Τριγωνομετρίας και της Στατιστικής, οι διδάσκοντες πρέπει να ενθαρρύνουν τους μαθητές στη χρήση των υπολογιστικών μηχανών (calculators), ώστε να μη σπαταλάται χρόνος στη χρήση των τριγωνομετρικών πινάκων και γενικότερα στον αριθμητικό λογισμό. Έτσι, θα έχουν τη δυνατότητα οι μαθητές, να ασχοληθούν με μεγαλύτερη ποικιλία ασκήσεων και να διαθέσουν περισσότερο χρόνο στη διαδικασία λύσης των προβλημάτων και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

    Είναι αυτονόητο, ότι το περιεχόμενο των ιστορικών σημειωμάτων, καθώς και τα σχετικά με τις υπολογιστικές μηχανές, δεν αποτελούν ύλη για εξέταση.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

1. Το «παραδοσιακό» διδακτικό μοντέλο και οι συνέπειές του.

Από τις αρχές της δεκαετίας του '80, σε διεθνές επίπεδο, η Μαθηματική Εκπαίδευση σταδιακά, αλλά συστηματικά και μεθοδικά, υφίσταται μεταβολές που εκτείνονται σε όλες τις συνιστώσες της όπως για παράδειγμα στους σκοπούς και στους στόχους, στο περιεχόμενο, στις διδακτικές μεθόδους, στα είδη των δεξιοτήτων που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές, στη διάρθρωση του Προγράμματος Σπουδών και των διδακτικών βιβλίων, στις μεθόδους αξιολόγησης κτλ.

Οι λόγοι που προκαλούν τις αλλαγές προκύπτουν τόσο από την εξέλιξη των σύγχρονων κοινωνιών και τον συνεχώς διευρυνόμενο ρόλο των νέων τεχνολογιών, όσο και από τα συμπεράσματα των ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών σε ζητήματα Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Και στις δύο περιπτώσεις, οι συνέπειες συγκλίνουν στο να δούμε με διαφορετικό τρόπο το ρόλο και τη θέση του καθηγητή των Μαθηματικών μέσα στην τάξη, να δώσουμε ένα ευρύτερο περιεχόμενο στον όρο «Διδασκαλία των Μαθηματικών» και να γίνουμε πιο ακριβείς στο τι μπορεί να σημαίνει «Μαθαίνω Μαθηματικά».

Προκειμένου να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας ορίσουμε ως **«παραδοσιακό» διδακτικό μοντέλο το ακόλουθο:** Ο δάσκαλος των Μαθηματικών αρχίζει τη διδασκαλία συνήθως με την παρουσίαση μιας τεχνικής, ακολουθούν ασκήσεις για εξάσκηση και ασκήσεις και προβλήματα για εφαρμογή. Το κέντρο βάρους εστιάζεται στην απόκτηση εκείνων ακριβώς των δεξιοτήτων που παρουσιάζει ο δάσκαλος στην τάξη, στην ταχύτητα και την ακρίβεια των απαντήσεων. Το μοντέλο λειτουργεί κάτω από την ακόλουθη υπόθεση: Το σύνολο των τεχνικών που διαθέτουν οι μαθητές για να λύνουν ασκήσεις είναι το σώμα των γνώσεων που πρέπεί να κατέχουν. Επομένως, η ευχέρεια στις τεχνικές αυτές εκφράζει το αν οι μαθητές έχουν μάθει τα Μαθηματικά ή όχι.

Στο μοντέλο αυτό η γνώση είναι προσωπική υπόθεση του κάθε μαθητή, ο οποίος εργάζεται μόνος του, και είναι ανεξάρτητη από αυτόν. Δηλαδή, ο μαθητής και η γνώση είναι δύο «πράγματα» ξεχωριστά, επομένως ο μαθητής δεν μπορεί να την επηρεάσει, το μόνο που του απομένει είναι να τη μάθει. Τέλος, το πρόβλημα και ιδιαίτερα η Λύση Προβλήματος, που αποτελεί την ουσία της Μαθηματικής γνώσης, στο μοντέλο αυτό έχει έναν συγκεκριμένο και περιορισμένο χαρακτήρα, αποτελεί κριτήριο μάθησης: «Σου διδάσκω για παράδειγμα έναν αλγόριθμο και μετά, προκειμένου να διαπιστώσω αν τον έμαθες, θα πρέπει να είσαι ικανός να λύσεις μερικές ή και όλες τις ασκήσεις και τα προβλήματα που βρίσκονται στο τέλος κάθε ενότητας ή Κεφαλαίου».

Η πρόσφατη έρευνα έχει αναδείξει τα σημαντικά προβλήματα που παρουσιάζει το «παραδοσιακό» διδακτικό μοντέλο. Για παράδειγμα, έχει διαπιστωθεί ότι η μακρόχρονη «θητεία» στην παραδοσιακή διδασκαλία προκαλεί την ανάπτυξη των ακόλουθων στάσεων και πεποιθήσεων στους μαθητές:

- Όλα τα προβλήματα μπορούν να λυθούν το πολύ σε δέκα λεπτά. Αν δεν μπορέσεις να λύσεις ένα πρόβλημα σε δέκα λεπτά, τότε δεν μπορείς να το λύσεις, επομένως πάψε να ασχολείσαι με αυτό.
- Μετά από χρόνια απομνημόνευσης αλγορίθμων, κανόνων και τύπων, οι μαθητές θεωρούν τους εαυτούς τους ως παθητικούς δέκτες γνώσεων, που άλλοι πολύ πιο έξυπνοι από αυτούς τις έχουν βρει.
- Για πολλούς μαθητές, ιδιαίτερα όταν ασχολούνται με τη Θεωρητική Γεωμετρία, η απόδειξη δεν είναι τίποτε άλλο παρά μία «τελετουργική» δραστηριότητα που έχει σκοπό να επιβεβαιώσει αυτό που ήδη είναι γνωστό χιλιάδες χρόνια πριν!
- Τα Μαθηματικά δεν έχουν σχέση με τον πραγματικό κόσμο. Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε και την άποψη του Lakatos:

  «Δεν έχει γίνει επαρκώς αντιληπτό ότι η τρέχουσα μαθηματική και επιστημονική εκπαίδευση είναι το θερμοκήπιο ενός ύφους αυθεντίας και ο χειρότερος εχθρός της ανεξάρτητης και κριτικής σκέψης». Βλέπουμε λοιπόν ότι στις περισσότερες περιπτώσεις τα αποτελέσματα της διδασκαλίας είναι ακριβώς τα αντίθετα από τους στόχους και τις επιδιώξεις μας. Η κατάσταση αυτή δεν είναι μόνον ελληνικό φαινόμενο. Είναι μια γενική διαπίστωση που παρουσιάζεται στις περισσότερες χώρες.

  Με ποιον τρόπο μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την κατάσταση; Με ποιον τρόπο θα δώσουμε μια ισορροπημένη εικόνα στους μαθητές μας και στο κοινωνικό σύνολο γενικότερα, για το τι μπορούμε να κάνουμε με τα Μαθηματικά; Με ποιον τρόπο θα αποφύγουμε αντιλήψεις όπως: «Ο δάσκαλος γνωρίζει την απάντηση αλλά μας δίνει το πρόβλημα για να δει αν μπορούμε να τη βρούμε και εμείς»;

2. Προτάσεις για πιο «ενεργητικές» διδασκαλίες.

Θα πρέπει να επισημάνουμε από την αρχή ότι δεν υπάρχει ένα συγκεκριμένο μοντέλο διδασκαλίας το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα να αποφύγουμε τις προηγούμενες «δυσάρεστες» καταστάσεις. Αντίθετα, υπάρχουν κάποιες γενικές αρχές με τις οποίες μπορούμε να συγκροτήσουμε κατάλληλα μοντέλα διδασκαλίας.

Μια σύγχρονη αντίληψη για τον τρόπο με τον οποίο μαθαίνουν οι μαθητές, βασίζεται στις ακόλουθες παραδοχές:

- Η γνώση δε «μεταφέρεται» από το δάσκαλο στο μαθητή. **Αντίθετα, η γνώση και ο μαθητής, είναι έννοιες αλληλοσυνδεόμενες: Ο μαθητής συμμετέχει ενεργά στην οικοδόμηση - ανάπτυξη της γνώσης του (Η υπόθεση της κατασκευής της γνώσης).**

Η αρχή αυτή δέχεται ότι ο κάθε μαθητής έχει το δικό του προσωπικό τρόπο πρόσβασης στη γνώση και βρίσκεται σε κατευθείαν αντίθεση με την αντίστοιχη αρχή του «παραδοσιακού» μοντέλου, ότι ο μαθητής και η γνώση είναι δύο ξεχωριστές έννοιες.

Η διαδικασία της μάθησης εξαρτάται από την ήδη υπάρχουσα γνώση: Κάθε τι που μαθαίνω εξαρτάται από το τί γνωρίζω.

Επομένως, ο δάσκαλος των Μαθηματικών πρέπει να είναι ενήμερος για το γεγονός ότι θα υπάρχουν στην τάξη του μαθητές που δεν έχουν κατανοήσει τις προηγούμενες έννοιες προκειμένου να συμμετάσχουν στο νέο μάθημα, και ότι θα υπάρχουν μαθητές που έχουν οικοδομήσει με λάθος τρόπο τις προηγούμενες γνώσεις. Και στις δύο περιπτώσεις θα συναντήσει δυσκολίες στην εξέλιξη του νέου μαθήματος.

Υπάρχει μια συνεχής αλληλεπίδραση ανάμεσα στο προσωπικό νόημα, που οικοδομεί ο κάθε μαθητής, και στην κοινωνική διάσταση της γνώσης στα πλαίσια της σχολικής τάξης. Τα προσωπικά νοήματα συζητούνται μέσα στην τάξη προκειμένου να ομογενοποιηθούν και να γίνουν συμβατά και συνεπή με ό,τι δέχεται η μαθηματική κοινότητα (Η υπόθεση της αλληλεπίδρασης ή διάδρασης).

Προκειμένου να γίνει πραγματικότητα η αρχή αυτή θα πρέπει η σχολική τάξη να λειτουργεί ως μικρή «μαθηματική κοινότητα-εργαστήριο».

Όποιος δάσκαλος των Μαθηματικών αποδεχθεί τις αρχές αυτές, θα πρέπει να δει με έναν διαφορετικό τρόπο τη θέση και το ρόλο του μέσα στην τάξη. Για παράδειγμα, θα πρέπει να οργανώνει την τάξη έτσι, ώστε μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες να δώσει τη δυνατότητα και την ευκαιρία στους μαθητές του να οικοδομήσουν τη γνώση, και παράλληλα να ελαττώσει το χρόνο που αφιερώνει για την παρουσίαση, από τον ίδιο, θεμάτων και εννοιών.

Ουσιαστικά, η αποδοχή των παραπάνω αρχών μας οδηγεί στην υιοθέτηση «ενεργητικών μεθόδων» μάθησης. Με τον όρο αυτό εννοούμε μαθησιακές δραστηριότητες που περιλαμβάνουν ερευνητικές εργασίες, επίλυση προβλημάτων, εργασία σε μικρές ομάδες μαθητών. Τέτοιες δραστηριότητες μπορεί να είναι προσεκτικά σχεδιασμένα προβλήματα που να οδηγούν τους μαθητές να κάνουν υποθέσεις και εικασίες, να ελέγχουν τις υποθέσεις τους, να παρατηρούν και να αναπτύσσουν ένα μοντέλο, να ακολουθούν προσεγγιστικές και αριθμητικές μεθόδους, να «μεταφράζουν» ένα μοντέλο από ένα αναπαραστασιακό σύστημα σε ένα άλλο, για παράδειγμα από γλωσσική περιγραφή σε αλγεβρικό τύπο, από αλγεβρικό τύπο σε γραφική παράσταση, από πίνακα τιμών σε αλγεβρικό τύπο κτλ. Με τον ίδιο όρο εννοούμε επίσης, την ανάπτυξη μιας στάσης για ενεργητική νοητική δραστηριότητα, σε αντίθεση με την παθητική που χαρακτηρίζεται από την απομνημόνευση και την εξάσκηση.

- **Το ζητούμενο είναι η ανάπτυξη μιας ενεργητικής και ερευνητικής στάσης των μαθητών ως προς τα Μαθηματικά.**
  Η αποδοχή αυτού του στόχου τοποθετεί σε κεντρική θέση το πρόβλημα και τις διαδικασίες Λύσης Προβλήματος. Συμπληρώνουμε λοιπόν τις προηγούμενες παραδοχές και με την ακόλουθη:
- **Το Πρόβλημα είναι «πηγή» νοήματος της μαθηματικής γνώσης.** Τα αποτελέσματα των νοητικών διεργασιών συνιστούν γνώση, μόνον όταν αποδειχθούν επαρκή και αξιόπιστα στην επίλυση προβλημάτων. (Η επιστημολογική υπόθεση).
  Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή, το πεδίο «δοκιμασίας» της γνώσης ενός μαθητή είναι η επίλυση προβλημάτων και όχι η εξέταση αλγορίθμων , κανόνων και τύπων. Γενικότερα, κάθε δάσκαλος των Μαθηματικών θα πρέπει να έχει υπόψη του ότι με τα προβλήματα:
  – Δικαιολογούμε την ίδια τη διαδικασία της διδασκαλίας, αποκαλύπτοντας την αξία και τη χρησιμότητα των Μαθηματικών .
  – Δίνουμε κίνητρα στους μαθητές να ενδιαφερθούν για τα Μαθηματικά.
  – Εισάγουμε καλύτερα καινούριες έννοιες ή διδακτικές ενότητες.
  – Βοηθούμε τους μαθητές να αναπτύξουν τις γνώσεις τους με πιο αποτελεσματικό τρόπο.
  – Ελέγχουμε το βαθμό κατανόησης των μαθητών στις μαθηματικές έννοιες.

  Αν τώρα επιχειρούσαμε να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα «τι σημαίνει μαθαίνω Μαθηματικά» θα μπορούσαμε να πούμε ότι **«μαθαίνω Μαθηματικά»** σημαίνει:
  – Μαθαίνω τους αλγόριθμους και τις αποδεικτικές διαδικασίες.
  – Μαθαίνω να διακρίνω σε ποια περίπτωση θα χρησιμοποιώ τον κάθε αλγόριθμο και την κατάλληλη αποδεικτική διαδικασία.
  – Μαθαίνω να χρησιμοποιώ τους αλγόριθμους και τις αποδεικτικές διαδικασίες στην επίλυση προβλημάτων.
  – Μαθαίνω να σκέπτομαι με μαθηματικό τρόπο, δηλαδή να οικοδομώ τη μαθηματική δομή ενός θέματος ή μιας έννοιας και να εκφράζω τις σκέψεις μου με τη γλώσσα και τα σύμβολα των Μαθηματικών.

3. Προτάσεις για το σχεδιασμό διδασκαλίας

Ένα από τα βασικά ζητήματα της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι ο τρόπος με τον οποίο ο δάσκαλος μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές του να κατασκευάσουν ιδέες και έννοιες που η μαθηματική κοινότητα χρειάστηκε εκατοντάδες ή χιλιάδες χρόνια να αναπτύξει. Ταυτόχρονα, η εργασία του δασκάλου και αυτή του μαθητή χαρακτηρίζονται από αντίθετες τροχιές. Έτσι, από τη μια μεριά ο δάσκαλος θα πρέπει να τοποθετήσει τη γνώση σε κατάλληλα, οικεία για το μαθητή, πλαίσια, να την «προσωποποιήσει» κατά κάποιο τρόπο, ενώ από την άλλη ο μαθητής θα πρέπει να κάνει την αντίθετη τροχιά όπου από τα συγκεκριμένα πλαίσια με διαδοχικές αφαιρέσεις και γενικεύσεις, θα κατακτήσει τη μαθηματική δομή του θέματος. Τα «εργαλεία» με τα οποία υλοποιούμε κάθε σχεδιασμό είναι τα προβλήματα, με τα οποία συνθέτουμε την υποθετική μαθησιακή τροχιά του μαθητή, δηλαδή την πρόβλεψη που κάνουμε για τον τρόπο με τον οποίο θα θέλαμε να «μετακινηθεί» η σκέψη του μαθητή προκειμένου να αναπτυχθεί η μάθηση.

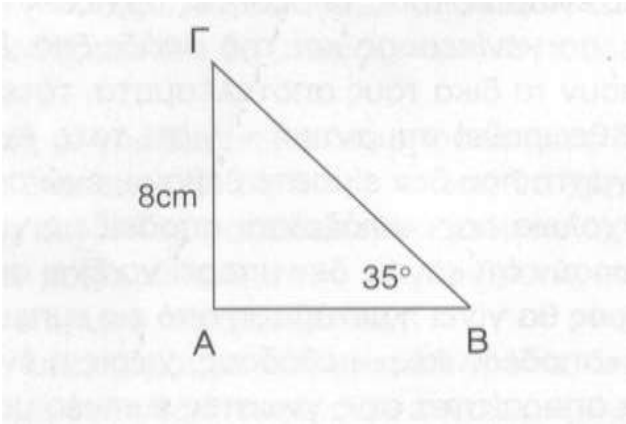
Ο σχεδιασμός που προτείνουμε αναφέρεται σε μια ολόκληρη διδακτική ενότητα, στην οποία θα έχουμε επισημάνει τον κύριο στόχο, και μόνο μέσα από αυτό το σχεδιασμό αποκτά νόημα ένα συγκεκριμένο μάθημα. Ο σχεδιασμός μπορεί να έχει τρία μέρη.

Στο πρώτο μέρος δίνουμε ένα πρόβλημα-ένα ερώτημα, η επίλυση ή η απάντηση του οποίου θα οδηγήσει στην αναγκαιότητα της εισαγωγής της έννοιας που θέλουμε να διδάξουμε. Λέγοντας «επίλυση» στο μέρος αυτό, εννοούμε ότι οι μαθητές θα το προσεγγίσουν διαισθητικά προκειμένου να αναπτύξουν εικασίες ή υποθέσεις τις οποίες στη συνέχεια θα επιχειρήσουν να τις ελέγξουν επίσης διαισθητικά - εμπειρικά. Η ανάπτυξη εικασιών και υποθέσεων και η τάση για τον έλεγχό τους είναι ένα σαφές μήνυμα ότι έχουν αρχίσει να διαμορφώνουν την ενεργητική και ερευνητική στάση ως προς τα Μαθηματικά. *Μόνον αφού έχουν βρει τα δικά τους αποτελέσματα και έχουν αναπτύξει τις εικασίες τους, οι μαθητές αρχίζουν να αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα της γενίκευσης και της απόδειξης.* Για την ακρίβεια, όταν οι μαθητές βρουν τα δικά τους αποτελέσματα, τότε η απόδειξη μπορεί πραγματικά να θεωρηθεί σημαντική - γιατί τότε έχουμε ανάγκη να πειστούμε για πράγματα που δεν είμαστε βέβαιοι, ενώ στις περισσότερες περιπτώσεις στο σχολείο παρουσιάζονται αποδείξεις για αποτελέσματα που οι μαθητές θεωρούν ότι κανείς δεν μπορεί να έχει αμφιβολία!

Στο δεύτερο μέρος θα γίνει η μετάβαση από τις εμπειρικές - διαισθητικές αντιλήψεις σε «αποδεικτικές» μεθόδους, χωρίς η έννοια της απόδειξης να παραπέμπει απαραίτητα στις γνωστές τυπικές μαθηματικές μεθόδους. Αυτό εξαρτάται από το επίπεδο των μαθητών που αναφερόμαστε και το στόχο που έχουμε. Σε κάθε περίπτωση, το δεύτερο μέρος έχει σκοπό να αποσπάσει τη σκέψη του μαθητή από τα πλαίσια του συγκεκριμένου προβλήματος και να τον εισάγει στη μαθηματική δομή του θέματος που διαπραγματεύεται.

Στο τρίτο μέρος θεωρείται γνωστή η έννοια που διδάχθηκε και την οποία χρησιμοποιούμε για να λύσουμε προβλήματα και εφαρμογές. Το μέρος αυτό χρησιμεύει στο να διευρύνει τις εμπειρίες των μαθητών για το πεδίο εφαρμογής της έννοιας. Γι' αυτό το λόγο θα πρέπει να γίνεται εδώ ένα είδος ανασκόπησης. Με τον όρο «ανασκόπηση» εννοούμε τη συζήτηση στο τέλος του μαθήματος, όπου θα συνοψίζονται οι εφαρμογές της έννοιας έτσι όπως προκύπτουν από τα προβλήματα που λύθηκαν και θα συνδέεται η έννοια με εκφράσεις της καθημερινής γλώσσας, όπου αυτό είναι εφικτό, για παράδειγμα *«οι συναρτήσεις του ημίτονου και συνημίτονου είναι κατάλληλες για να περιγράφουμε περιοδικά φαινόμενα».*

Από όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα είναι φανερό ότι ένα μεγάλο μέρος της προσοχής μας εστιάζεται στην επίλυση προβλημάτων. Όμως, με τον όρο «πρόβλημα» δεν εννοούμε μόνον τα γνωστά προβλήματα των σχολικών βιβλίων αλλά και τα λεγόμενα «ανοικτά προβλήματα». Γενικά, θα ονομάσουμε ανοικτό το πρόβλημα που μπορεί να ερμηνευτεί με πολλούς τρόπους και επομένως δέχεται διαφορετικές λύσεις. Το γεγονός αυτό αναγκάζει το μαθητή να πάρει πρωτοβουλίες κατά τη διάρκεια της επίλυσής του. Για παράδειγμα, το πρόβλημα «Να σχεδιάσετε μια εκδρομή του σχολείου σας με λεωφορεία» είναι ανοικτό. Αντίθετα, το πρόβλημα «Να βρείτε πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν για να μετακινηθούν 300 μαθητές ενός σχολείου, όταν το κάθε λεωφορείο χωράει 50 μαθητές», είναι ένα κλειστό τυπικό σχολικό πρόβλημα. Σε πολλές περιπτώσεις, μια διαφορετική διατύπωση είναι αρκετή για να εισάγει ένα βαθμό πρωτοβουλίας στους μαθητές. Έτσι, αντί στο παρακάτω τρίγωνο να ζητήσουμε για παράδειγμα «να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ» , η ερώτηση μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «στο ακόλουθο σχήμα να υπολογίσετε όσα στοιχεία του τριγώνου μπορείτε».



Φυσικά, τα όσα αναφέραμε αποτελούν μόνον νύξεις για το ενδιαφέρον ζήτημα του «ανοικτού προβλήματος» και το ρόλο του στη διαδικασία της μάθησης. Από την άλλη μεριά, είναι σαφές ότι οι πιο πολλές ασκήσεις και τα προβλήματα των σχολικών βιβλίων είναι κλειστά. Όμως, το να δίνουμε μερικές φορές, στους μαθητές μας ανοικτές δραστηριότητες αντί για ασκήσεις των δύο ή τριών λεπτών, είναι ένα βήμα προς τη μεταφορά της υπευθυνότητας της διαδικασίας της μάθησης από το δάσκαλο στο μαθητή.

4. Η καθημερινή διδακτική πρακτική.

Ποιες είναι οι συνέπειες των προτάσεών μας στην τάξη; **Θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι προτάσεις αυτές παρουσιάζονται ως δοκιμαστικές ή εναλλακτικές ιδέες για όσους θελήσουν να τις εφαρμόσουν μέσα στην τάξη. Εξάλλου, θεωρούμε 6έ6αιο ότι για πολλούς οι προτάσεις αυτές δεν είναι άγνωστες και ότι αρκετοί καθηγητές χρησιμοποιούν παρόμοιες επιλογές στις τάξεις τους.** Όμως είναι κατανοητό ότι η συστηματική εισαγωγή τους στην καθημερινή διδακτική πρακτική *απαιτεί μια μακρόχρονη πορεία η οποία θα πρέπει να υποστηριχθεί από ένα μεθοδικό πρόγραμμα επιμόρφωσης.*

Από την άλλη μεριά, με κανέναν τρόπο δεν πρέπει να δημιουργηθεί η εντύπωση πως ό,τι γίνεται σήμερα μέσα στην τάξη είναι καταδικαστέο. Αντίθετα, οι επιλογές του «παραδοσιακού» μοντέλου ενσωματώνονται και αποκτούν ένα πιο συγκεκριμένο περιεχόμενο μέσα σε ένα ευρύτερο φάσμα διδακτικών ενεργειών .Έτσι, για παράδειγμα ούτε συνήθεις ασκήσεις και προβλήματα θα πρέπει να αγνοηθούν ούτε η παρουσίαση του μαθήματος από τον ίδιο το δάσκαλο. Εκείνα που πρέπει να μας απασχολήσουν είναι ερωτήματα όπως: **Σε ποια περίπτωση και για ποιο λόγο** ο **δάσκαλος θα επιλέξει να παρουσιάσει** ο **ίδιος το μάθημα** ή **πότε και γιατί θα κάνει ερευνητικές δραστηριότητες αντί για ασκήσεις;**

Όπως έχουμε ήδη τονίσει, δεν υπάρχουν συγκεκριμένες διδακτικές προσεγγίσεις, υπάρχουν μόνο συγκεκριμένες γενικές αρχές. Μια διδακτική προσέγγιση (δηλαδή ένας τρόπος υλοποίησης των αρχών) εξαρτάται τόσο από το ίδιο το θέμα όσο και από το δάσκαλο και τους μαθητές του. Μια διδασκαλία που αποδεικνύεται επιτυχής σε κάποια σχολική τάξη μπορεί να μην είναι κατάλληλη για κάποια άλλη. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν συγκεκριμένες επιλογές που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην τάξη όπως:

- Η παρουσίαση του μαθήματος από το δάσκαλο (ευθεία ή μετωπική διδασκαλία).
- Συζήτηση ανάμεσα στο δάσκαλο και τους μαθητές ή ανάμεσα στους, μαθητές.
- Πρακτικές δραστηριότητες.
- Εξάσκηση και πρακτική σε βασικές δεξιότητες.
- Λύση Προβλήματος, όπου εδώ εννοούμε τόσο τα «καθαρά» μαθηματικά όσο και τα πραγματικά προβλήματα, δηλαδή προβλήματα που αναφέρονται σε εξωμαθηματικές καταστάσεις.
- Ερευνητικές δραστηριότητες και ερευνητικές εργασίες.

Πότε για παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε την παρουσίαση; Σύντομα, αναφέρουμε ότι τη διδασκαλία αυτή χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να δείξουμε κάτι, να δώσουμε πληροφορίες, να παρουσιάσουμε ένα γεγονός. Από μόνη της δεν επαρκεί για την κατανόηση, για την ανάπτυξη δεξιοτήτων λύσης προβλήματος και ερευνητικών δραστηριοτήτων.

Αντίθετα, η κατανόηση ενός θέματος ή μιας έννοιας, **είναι δυνατόν** να αναπτυχθεί μέσα από σχεδιασμό διδασκαλίας σε τρία μέρη όπως την περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Στην πραγματικότητα, η προσέγγιση αυτή προτείνει την διδασκαλία των Μαθηματικών με διαδικασίες Λύσης Προβλήματος, όπου η επίλυση προβλημάτων διευρύνεται ως έννοια και **αποτελεί το πλαίσιο μέσα στο οποίο αναπτύσσεται η μάθηση.**

Συνήθως οι ερευνητικές δραστηριότητες, ή απλά δραστηριότητες, είτε δίνονται από τον καθηγητή για διερεύνηση μέσα στην τάξη είτε προκύπτουν από ερωτήσεις των μαθητών, για παράδειγμα «θα μπορούσαμε να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα με άλλους αριθμούς;» ή «τι θα συμβεί αν...». Στην τελευταία αυτή περίπτωση, που είναι πολύ συχνή, η ουσιαστική συνθήκη για την πραγματοποίηση μιας δραστηριότητας είναι η επιθυμία του δασκάλου να διερευνήσουν οι μαθητές το ζήτημα και όχι να δώσει ο ίδιος την απάντηση. Είναι προφανές ότι το «κλίμα» της τάξης πρέπει να ευνοεί και να προωθεί τέτοιου είδους ερωτήσεις. Από την άλλη μεριά, οι ερευνητικές εργασίες είναι δραστηριότητες που απαιτούν περισσότερο χρόνο, για παράδειγμα μία ή δύο εβδομάδες, με στόχο οι μαθητές:

- Να εξετάσουν, να αναλύσουν και να δώσουν απαντήσεις σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, ή μια σειρά προβλημάτων που να συνδέονται μεταξύ τους, ή σε μια πραγματική κατάσταση, η οποία είναι αρκετά σύνθετη, ώστε να διερευνηθεί μέσα στην τάξη ή να είναι έτοιμη στο επόμενο μάθημα. Στην περίπτωση αυτή τα Μαθηματικά που απαιτούνται είναι γνωστά.
- Να διερευνήσουν ένα θέμα από την ιστορία των Μαθηματικών.
- Να αναπτύξουν ένα θέμα της διδακτέας ύλης τους, μέσα σε μια ή δύο εβδομάδες, αντί να διδαχθεί το ίδιο θέμα στην τάξη.

.

Τέλος, τα τελευταία χρόνια οι έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών έχουν αναδείξει την αξία της εργασίας των μαθητών σε ομάδες. Την πρόταση αυτή μπορούμε να τη δούμε σε δύο επίπεδα:

Σε επίπεδο αρχών: Σχεδόν καμία λύση επιστημονικού ή κοινωνικού προβλήματος δεν είναι πλέον αποτέλεσμα της εργασίας ενός μόνον ατόμου, ενώ θα πρέπει, επίσης, να τη δούμε και σε συνάρτηση με το ερώτημα «ποιο είναι το είδος του πολίτη που έχει ανάγκη η κοινωνία μας;» Και εδώ εννοούμε όχι μόνο τον ενημερωμένο πολίτη αλλά και εκείνον ο οποίος ακούει και υπολογίζει τη γνώμη του άλλου και συνεργάζεται στα πλαίσια μιας ομάδας εργασίας, γεγονός που του προσθέτει αξιόλογα στοιχεία στη γενικότερη παιδεία του, και όχι μόνο στη μαθηματική του εκπαίδευση.

Σε επίπεδο διδακτικής πρακτικής: Έρευνες έχουν επισημάνει ότι η συνεργασία των μαθητών αναπτύσσει πολλαπλές και διαφορετικές προσεγγίσεις σε ένα πρόβλημα. Επίσης, ένα σημαντικό πλεονέκτημα φαίνεται να είναι η ευκαιρία που έχουν οι μαθητές να συζητούν τις απόψεις και ιδέες τους, γεγονός που διευκολύνει την επισήμανση των προσωπικών ιδεών και την ομογενοποιήση των διαφορετικών νοημάτων σύμφωνα με αυτά που απαιτεί η μαθηματική κοινότητα (βλέπε παράγραφο 2, 3η παραδοχή). Όμως, το πιο σημαντικό στοιχείο της εργασίας σε ομάδες, είναι το γεγονός ότι επιτρέπει να αναπτυχθεί η ικανότητα να παίρνουμε αποστάσεις από τις πράξεις μας και να τις κρίνουμε. Η συζήτηση σε ομάδες διευκολύνει την ανάπτυξή της, η οποία θεωρείται τόσο σημαντική ώστε κάποιοι ερευνητές να ισχυρίζονται ότι είναι αυτή η ικανότητα που ξεχωρίζει τον έμπειρο μαθηματικό από τον μη έμπειρο. Εξάλλου, «η κριτική σκέψη», με ό,τι μπορεί να εννοεί κανείς με τον όρο αυτό, θα πρέπει να έχει ως βασικό της συστατικό αυτήν την ικανότητα.

<u>Παραδείγματα από την Άλγεβρα</u>

Η σειρά μαθημάτων που ακολουθεί, προτείνεται ως εναλλακτική λύση για τη διδασκαλία της παραγράφου:

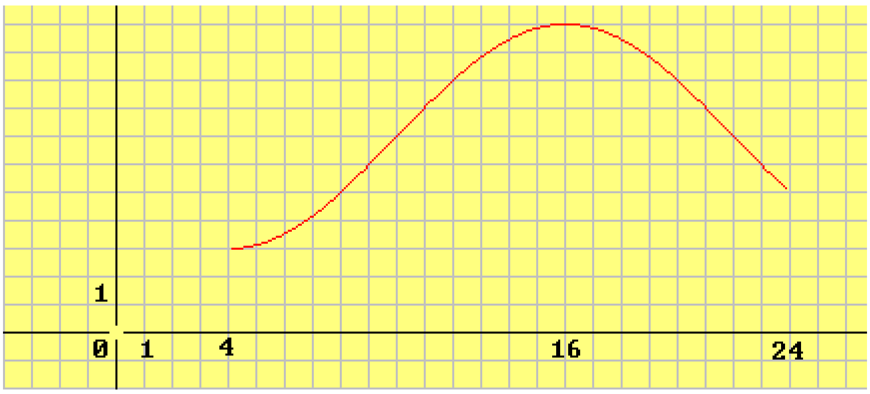
«Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης»

1$^{\text{ο}}$ Μάθημα: ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Γνησίως αύξουσα συνάρτηση

- Στην αρχή δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας $T(t)$ ενός τόπου στο χρονικό διάστημα από τις 4 το πρωί μιας μέρας μέχρι τις 12 το βράδυ της ίδιας μέρας



α) Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση:

Όταν οι τιμές του διαστήματος Δ=[4,16] αυξάνονται, τότε οι τιμές της θερμοκρασίας $T(t)$:

Α) αυξάνονται

Β) μειώνονται

Γ) παραμένουν σταθερές

β) Αν t_1, t_2 είναι δυο σημεία του διαστήματος Δ, να συμπληρώσετε τη συνεπαγωγή:

$$\text{αν } t_1 < t_2 \quad \text{τότε} \quad T(t_1) \ \ldots \ T(t_2)$$

γ) Στο διάστημα Δ η συνάρτηση Τ:
Α) διατηρεί τη φορά της ανισότητας
Β) αλλάζει τη φορά της ανισότητας
Γ) μετατρέπει την ανισότητα σε ισότητα

- Στη συνέχεια να δοθεί ο ορισμός της γνησίως αύξουσας συνάρτησης σε διάστημα Δ.

- Έπειτα, με τη βοήθεια του ορισμού αυτού, οι μαθητές να αποδείξουν ότι η συνάρτηση $f(x)=2x+1$ είναι γνησίως αύξουσα συμπληρώνοντας τις ανισότητες που απουσιάζουν:

$$x_1 < x_2$$
$$2x_1 \;\ldots\; 2x_2$$
$$2x_1+1 \;\ldots\; 2x_2+1$$
$$f(x_1) \;\ldots\; f(x_2)$$

- Με ίδιο τρόπο οι μαθητές να αποδείξουν ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha>0$ είναι γνησίως αύξουσα.

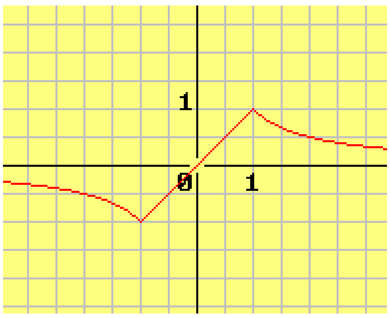
2) Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

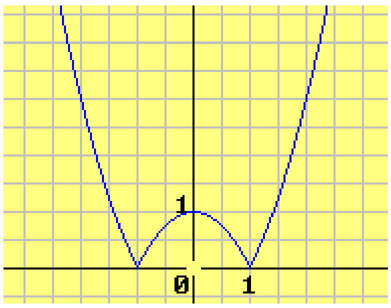
- Η έννοια της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης να παρουσιαστεί αναλόγως.
- Στη συνέχεια να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=-2x+1$ και γενικά ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha<0,$ είναι γνησίως φθίνουσα.

3) Ασκήσεις για το σπίτι

i) Άσκηση 3 της σελίδας 92

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία κάθε μία, από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι: α) γνησίως αύξουσα και β) γνησίως φθίνουσα





iii) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες:
α) $f(x)=\sqrt{x}$, β) $f(x)=\sqrt{8-2x}$
γ) $f(x)=\dfrac{1}{x}+3$, στο $(0,+\infty)$ δ) $f(x)=3-\dfrac{4}{x}$, στο $(0,+\infty)$

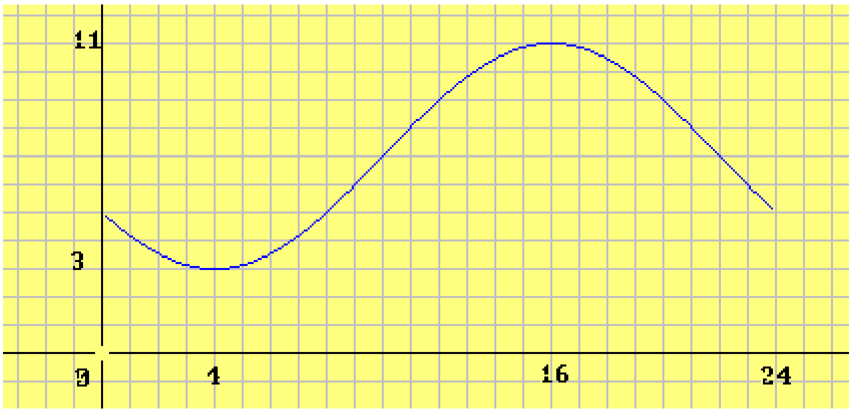
iv) Η άσκηση 1 της σελίδας 92

2^{o} Μάθημα   ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Ελάχιστο συνάρτησης

- Στην αρχή δίνεται στους μαθητές το ακόλουθο πρόβλημα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η θερμοκρασία $T(t)$ ενός τόπου στο χρονικό διάστημα από τις 12 το βράδυ μιας ημέρας μέχρι τις 12 το βράδυ της επομένης.



α) Πότε η θερμοκρασία του τόπου παίρνει τη ελάχιστη τιμή της; Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της θερμοκρασίας του τόπου;
β) Ποιο είναι το είδος της μονοτονίας της *T* εκατέρωθεν του σημείου στο οποίο η θερμοκρασία παίρνει την ελάχιστη τιμή της:
γ) Να συμπληρώσετε την ανισότητα:

$$T(t)\ \ldots\ T(4), \qquad \text{για κάθε } t\in\ 0,24$$

- Στη συνέχεια να δοθεί ο ορισμός του ελαχίστου συνάρτησης και να ξεκαθαριστεί η διαφορά ανάμεσα στις έννοιες: «θέση ελαχίστου συνάρτησης», «ελάχιστο συνάρτησης» και «χαμηλότερο σημείο της γραφικής παράστασης συνάρτησης».

- Έπειτα, με τη βοήθεια του ορισμού αυτού οι μαθητές να αποδείξουν ότι η συνάρτηση $f(x)=2x^2+3$ έχει ελάχιστο το $f(0)=3$, συμπληρώνοντας τις ανισότητες που απουσιάζουν:

$$x^2\geq 0 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$
$$2x^2\ \ldots\ 0 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$
$$2x^2+3.....3 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$
$$f(x)\ \ldots\ f(0) \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

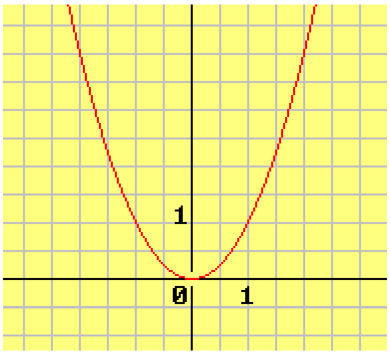
- Ομοίως και για τη συνάρτηση $f(x)=2|x-1|-5$.

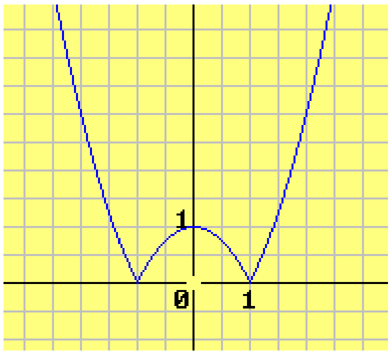
2. Μέγιστο συνάρτησης

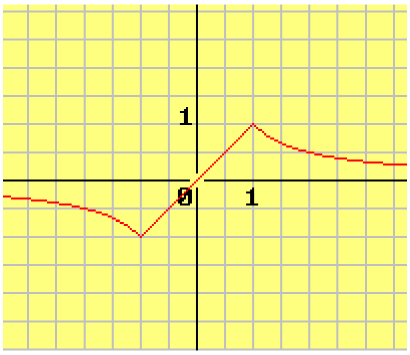
Η έννοια του μεγίστου συνάρτησης να παρουσιαστεί αναλόγως.

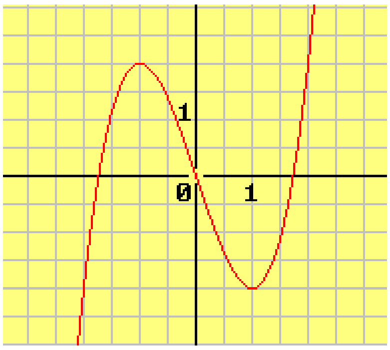
3. Ασκήσεις για το σπίτι

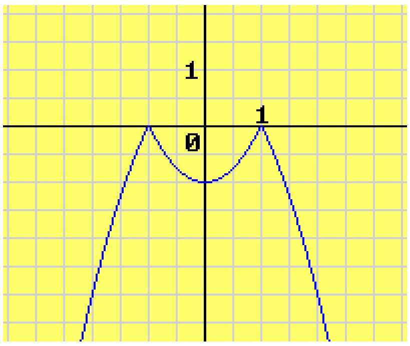
α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα και τις θέσεις ακροτάτων των παρακάτω συναρτήσεων:

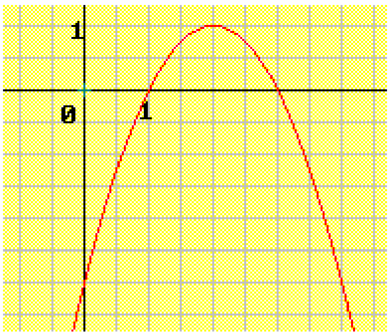












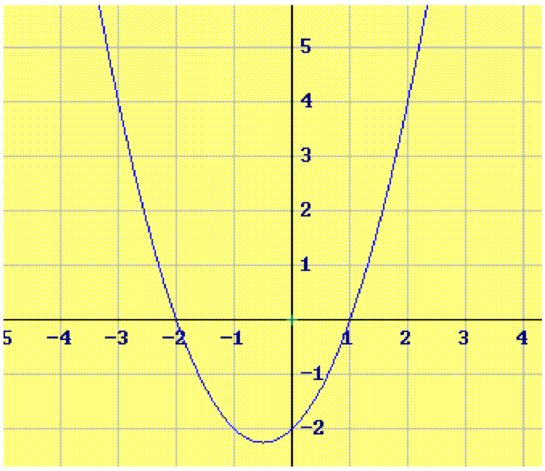
β) Η άσκηση 4 της σελίδας 92.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Ερωτήσεις διαφόρων τύπων.

Οι ερωτήσεις αυτού του τύπου αποτελούν έναν καλό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να επισημάνουμε τα ενδεχόμενα λάθη και τις ενδεχόμενες παρανοήσεις των μαθητών σε ένα θέμα. Το παράδειγμα που ακολουθεί αναφέρεται στο πρόσημο του τριωνύμου.

1. Δίνεται ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι η ακόλουθη:



Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f :

i) Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση:

- Το $f(2)$ είναι: Α. θετικό, Β. αρνητικό, Γ. μηδέν.
- Το $f(-2)$ είναι: Α. θετικό, Β. αρνητικό, Γ. μηδέν
- Το $f(-1)$ είναι: Α. θετικό, Β. αρνητικό, Γ. μηδέν
- Το $f(0)$ είναι: Α. θετικό, Β. αρνητικό, Γ. μηδέν.
- Το $f(1)$ είναι: Α. θετικό, Β. αρνητικό, Γ. μηδέν

ii) Να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

- $f(x)=0 \Leftrightarrow$ ……………………
- $f(x)>0 \Leftrightarrow$ ……………………
- $f(x)<0 \Leftrightarrow$ ……………………

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$

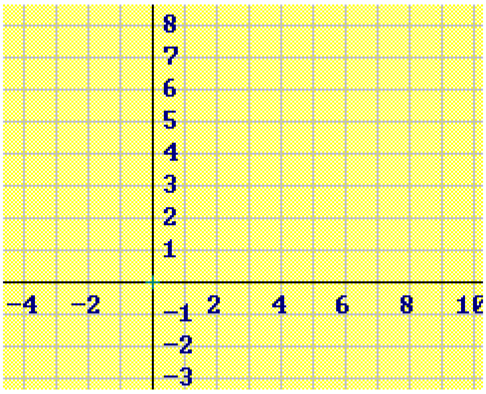
i) Να βρείτε τη διακρίνουσα της f : Δ = ………

ii) Η f έχει ρίζες; Αν έχει να βρεθούν.

iii) Η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τον άξονα των x; Ποια είναι τα σημεία αυτά;

iv) Αφού πρώτα κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ ....
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ ....



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$

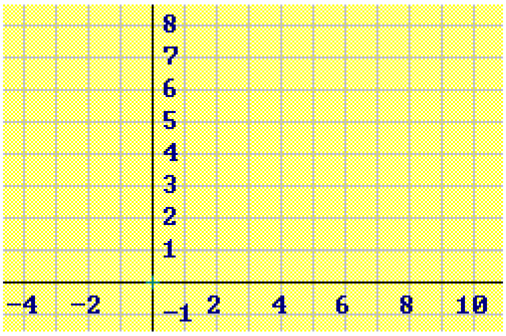
i) Να βρείτε τη διακρίνουσα της f : Δ = ...

ii) Η f έχει ρίζες; Αν έχει να βρεθούν.

iii) Η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τον άξονα των x; Ποια είναι τα σημεία αυτά;

iv) Αφού πρώτα κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ ....
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ ....



4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 4$

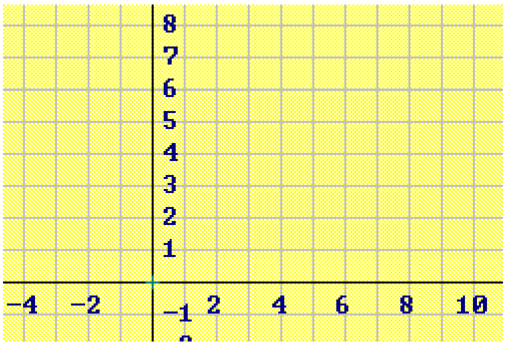
i) Να βρείτε τη διακρίνουσα της f : Δ = ...

ii) Η f έχει ρίζες; Αν έχει να βρεθούν.

iii) Η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τον άξονα των x; Ποια είναι τα σημεία αυτά;

iv) Αφού πρώτα κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ ....
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ ....



5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

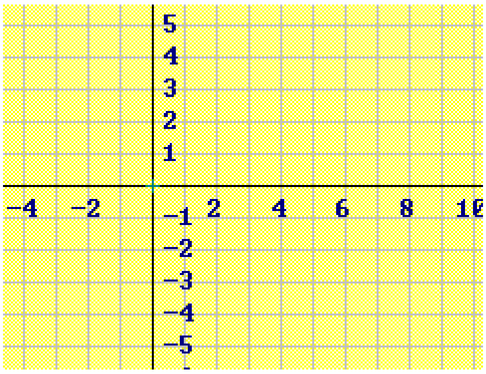
i) Να βρείτε τη διακρίνουσα της f : Δ = ………

ii) Η f έχει ρίζες; Αν έχει να βρεθούν.

iii) Η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τον άξονα των x; Ποια είναι τα σημεία αυτά;

iv) Αφού πρώτα κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ ……………………………………….
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ …………………………………..



6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

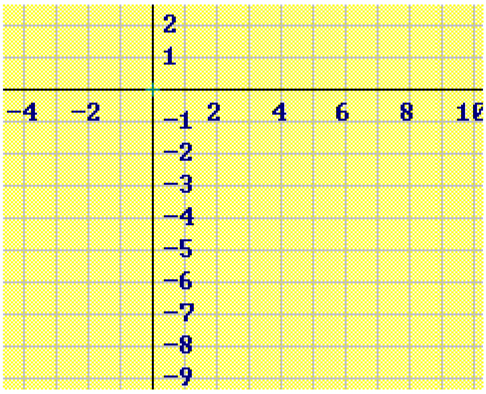
i) Να βρείτε τη διακρίνουσα της f : Δ = ………

ii) Η f έχει ρίζες; Αν έχει να βρεθούν.

iii) Η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τον άξονα των x; Ποια είναι τα σημεία αυτά;

iv) Αφού πρώτα κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ ……………………………………….
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ …………………………………..



7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

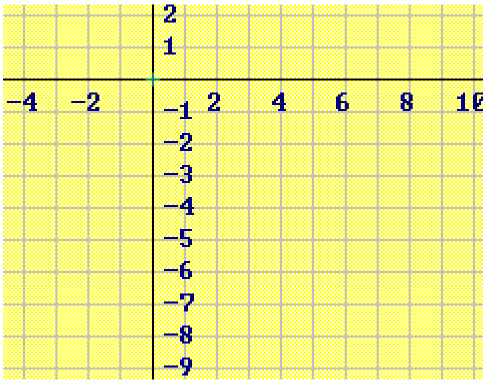
i) Να βρείτε τη διακρίνουσα της f : Δ = ………

ii) Η f έχει ρίζες; Αν έχει να βρεθούν.

iii) Η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τον άξονα των x; Ποια είναι τα σημεία αυτά;

iv) Αφού πρώτα κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ ………………………………………
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ …………………………………..



ΤΑΞΗ Α΄ ΕΠΑ.Λ.

ΑΛΓΕΒΡΑ: Ώρες 3/2 εβδομαδιαίως

Κατά το σχολικό έτος 2009-2010 θα χρησιμοποιηθεί το σχολικό βιβλίο «Άλγεβρα Α΄ Ενιαίου Λυκείου» των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου, Α. Σβέρκου. Η διδασκαλία, όμως, θα πρέπει να γίνει σύμφωνα με τη σειρά που περιγράφεται στον πίνακα και στις οδηγίες που ακολουθούν.

Στην πρώτη στήλη του πίνακα αναγράφονται οι ενότητες και οι παράγραφοι κάθε μιας ενότητας στις οποίες χωρίζεται η διδακτέα ύλη, στη δεύτερη στήλη αναγράφεται ο τίτλος κάθε παραγράφου, στη τρίτη στήλη αναγράφονται οι παράγραφοι του διδακτικού βιβλίου, ενώ στην τέταρτη στήλη αναγράφονται οι προτεινόμενες ώρες διδασκαλίας.

Οι οδηγίες που ακολουθούν αναφέρονται στους **σκοπούς** και τον **τρόπο διδασκαλίας** των παραγράφων κάθε ενότητας. Στο τέλος κάθε ενότητας προτείνεται και μια **δραστηριότητα**. Ανάλογα με το επίπεδο της τάξης και το διαθέσιμο χρόνο, ο διδάσκων μπορεί να δώσει στους μαθητές κάποιες από τις δραστηριότητες αυτές.

Αν, παρά τον προγραμματισμό της ύλης, δημιουργηθεί πρόβλημα με τον διαθέσιμο χρόνο διδασκαλίας, δεν θα πρέπει να επιδιωχθεί η με κάθε τρόπο ολοκλήρωση της ύλης (π.χ. συνοπτική παρουσίαση ή «αυτοδιδασκαλία») εις βάρος της ποιότητας της μαθησιακής διαδικασίας. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να ολοκληρωθεί η ύλη τις πρώτες εβδομάδες της επόμενης σχολικής χρονιάς. Ειδικότερα, σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να γίνει «συνοπτική διδασκαλία» των παραγράφων Ε2, Ε3 και Ε4 προκειμένου να ολοκληρωθεί η ενότητα ΣΤ. Η ολοκλήρωση ή και ολόκληρη η ενότητα ΣΤ μπορεί να διδαχθεί στη Β΄ Τάξη με την έναρξη των μαθημάτων της Άλγεβρας.

ΔΙΑΤΑΞΗ ΔΙΔΑΚΤΕΑΣ ΥΛΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ	ΤΙΤΛΟΣ	ΠΑΡ/ΦΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ	ΩΡΕΣ
Α	**Λογισμός στο $\mathbb{R}$ – Διάταξη στο $\mathbb{R}$**		**12**
Α.1	Οι πράξεις στο $\mathbb{R}$ και οι ιδιότητες τους	1.1.	2
Α.2	Δυνάμεις – Ταυτότητες – Παραγοντοποίηση	1.2.	2
Α.3	Επίλυση – Διερεύνηση της εξίσωσης : $\alpha x+\beta=0$	1.3.	2
Α.4	Εξισώσεις και προβλήματα των οποίων η επίλυση ανάγεται σε επίλυση εξισώσεων α΄ βαθμού	1.3	3
Α.5	Διάταξη πραγματικών αριθμών	1.4	2
Α.6	Οι ανισώσεις: $ax+\beta>0$ και $ax+\beta<0$	1.5	1
Β	**Απόλυτη τιμή – Ρίζες – Εξισώσεις β΄ βαθμού**		**10**
Β.1	Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού	1.6	3
Β.2	Ρίζες πραγματικών αριθμών	1.7	3

Β.3	Επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$	4.1	2
Β.4	Άθροισμα και γινόμενο ριζών	4.2	1
Β.5	Εξισώσεις και προβλήματα των οποίων η επίλυση ανάγεται σε επίλυση εξισώσεων β΄ βαθμού	4.3	1
Γ	**Συναρτήσεις**		**7**
Γ.1	Σύνολα	2.1	1
Γ.2	Η έννοια της συνάρτησης	2.2	2
Γ.3	Γραφική παράσταση συνάρτησης	2.3	2
Γ.4	Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$	2.4	2
Δ	**Συστήματα εξισώσεων**		**7**
Δ.1	Συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους	3.1	2
Δ.2	Επίλυση - Διερεύνηση γραμμικού συστήματος 2×2	3.2	1
Δ.3	Συστήματα γραμμικών εξισώσεων με περισσότερους από δύο αγνώστους	3.3	2
Δ.4	Συστήματα β΄ βαθμού	4.3	2
Ε	**Μελέτη συνάρτησης**		**12**
Ε.1	Μελέτη συνάρτησης	2.5	4
Ε.2	Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$	4.4.	4
Ε.3	Πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$	4.5.	2
Ε.4	Οι ανισώσεις: $P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot ...P_\nu(x)\geq 0$ ή ≤ 0 και $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$ ή ≤ 0.	4.5	2
ΣΤ	**Τριγωνομετρία**		**6**
ΣΤ.1	Τριγωνομετρικοί αριθμοί	5.1.	2
ΣΤ.2	Τριγωνομετρικές ταυτότητες	5.2.	2
ΣΤ.3	Αναγωγή στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο	5.3.	2

Ενότητα Α: Προτείνεται να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες.

Η ενότητα αυτή έχει **επαναληπτικό** χαρακτήρα και γι’ αυτό δεν πρέπει να διατεθούν περισσότερες από τις προτεινόμενες διδακτικές ώρες.

Στην αρχή της ενότητας επαναλαμβάνονται οι βασικές ιδιότητες των πράξεων και των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο, οι βασικές ταυτότητες και η παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων. Ακολουθεί η επίλυση και η διερεύνηση της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$, καθώς και η εφαρμογή της στη επίλυση προβλημάτων. Στη συνέχεια, αφού οριστεί η διάταξη των πραγματικών αριθμών, με τη βοήθεια της ισοδυναμίας

$\alpha > \beta \ \Leftrightarrow \ \alpha - \beta > 0$, αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες των ανισοτήτων και επιλύονται οι ανισώσεις $\alpha x + \beta > 0$ και $\alpha x + \beta < 0$.

Για πληρέστερη ενημέρωση των διδασκόντων προσδιορίζονται κατά παράγραφο οι επιδιωκόμενοι στόχοι και παρέχονται ειδικές διδακτικές οδηγίες.

Α.1 (§ 1.1): Οι μαθητές πρέπει:

i. Να γνωρίζουν την έννοια του ρητού και του άρρητου αριθμού.
ii. Να μπορούν να αξιοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων στο λογισμό.
iii. Να μπορούν να αξιοποιούν σωστά τους συνδέσμους «ή», «και» καθώς και το σύμβολο της ισοδυναμίας. Η χρήση των παραπάνω συμβόλων να διευκρινιστεί με περισσότερα παραδείγματα. Για παράδειγμα να τονιστεί ότι:

- Η εξίσωση $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$ αληθεύει, μόνο όταν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες $x^2 - x$ και $x^2 - 1$ είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή μόνο όταν αληθεύει η διάζευξη

  $$x^2 - x = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0 \qquad (1).$$

  Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ αληθεύουν συγχρόνως και οι δυο εξισώσεις της διάζευξης, ενώ για $x = 0$ και για $x = -1$ αληθεύει ακριβώς μια από τις δυο.
- Ο ισχυρισμός «$x^2 - x = 0$ και $x^2 - 1 = 0$» αληθεύει μόνο, όταν αληθεύουν συγχρόνως και οι δυο εξισώσεις του, δηλαδή μόνο για, $x = 1$ που είναι η κοινή ρίζα των εξισώσεων.
- Οι εξισώσεις $x = 1$ και $x^2 = 1^2$ δεν είναι ισοδύναμες και γενικά οι εξισώσεις $x = a$ και $x^{2\nu} = a^{2\nu}$ $(\nu \in \mathbb{N}^*)$ δεν είναι ισοδύναμες.

Κατά τη διδασκαλία της Α.1 να **μη διδαχθούν** το ερώτημα iv) της εφαρμογής της σελίδας 13 και οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας της σελίδας 16.

Α.2(§ 1.2): Οι μαθητές πρέπει:

i. Να γνωρίζουν την έννοια της δύναμης και να εφαρμόζουν τις ιδιότητες των δυνάμεων.
ii. Να γνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες και να μπορούν να τις αποδεικνύουν.
iii. Να μπορούν να μετατρέπουν παραστάσεις σε γινόμενο, του οποίου οι παράγοντες δεν αναλύονται περαιτέρω.
iv. Να μπορούν να απλοποιούν ρητές παραστάσεις.

Κατά τη διδασκαλία της Α.2

- Να **μη διδαχτούν**:
  1. Η ταυτότητα $\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha - \beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + ... + \beta^{\nu-1})$
  2. Οι εφαρμογές 1(iii) της σελίδας 18 και 3(i) της σελίδας 19.
  3. Η άσκηση 5 της Α΄ ομάδας της σελίδας 22 και οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας της σελίδας 23.

- Να δοθούν, όμως, προς επίλυση μερικές από τις ακόλουθες ασκήσεις:
  1. Να απλοποιήσετε τη παράσταση $(a + \beta)^2 - (a - \beta)^2$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

     $$\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999}\right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999}\right)^2 = 4.$$

  2. Να απλοποιήσετε την παράσταση $a^2 - (a-1)(a+1)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

     $$1{,}3265^2 - 0{,}3265 \cdot 2{,}3265 = 1 \quad \text{και}$$

$$3{,}12345^2 - 2{,}12345 \cdot 4{,}12345 = 1$$

3. Να απλοποιήσετε τις ακόλουθες παραστάσεις, αφού πρώτα βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται:

$\dfrac{x^2+x+1}{x+1} \cdot \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$, $\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-x}$,

$\dfrac{(x^2-x)+2x-2}{x^2-1}$, $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x} \cdot \dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2}$,

$(x-\dfrac{1}{x})^2 \cdot \dfrac{x^3+x^2}{(x+1)^3}$, $\dfrac{x(x-2)+1}{(x-2)(x-1)}$.

Η σπουδαιότητα της παραγοντοποίησης θα φανεί ιδιαίτερα κατά τη διδασκαλία των παραγράφων Α.4, Β.5 και Ε.4, όπου θα δοθεί ξανά η ευκαιρία για επανάληψη των βασικών ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης.

Α.3 (§1.3): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν και να διερευνούν εξισώσεις της μορφής: $\alpha x + \beta = 0$.

Κατά τη διδασκαλία της Α.3 προτείνεται:

- Πριν από το παράδειγμα της σελίδας 25 για την διερεύνηση εξίσωσης, να λυθούν ορισμένα απλούστερα παραδείγματα όπως:
  Να λυθούν οι εξισώσεις:
  i) $(\lambda-1)x = \lambda-1$, ii) $(\lambda-1)x = \lambda$, iii) $\lambda(\lambda-1)x = \lambda-1$
  Σε καμία περίπτωση **δεν πρέπει** να διατεθεί υπερβολικός χρόνος για τη διερεύνηση πολύπλοκων εξισώσεων που έχει ως αποτέλεσμα τη μη ολοκλήρωση της διδακτέας ύλης.

- Να δοθούν ως ασκήσεις και τύποι προς επίλυση από άλλα μαθήματα. Για παράδειγμα:
  α) Να λυθεί ο τύπος $v = v_0 + \alpha t$ ως προς *t.*
  β) Να λυθεί ο τύπος $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ ως προς R_1.
  γ) Από τους τύπους $S = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$ και $v = v_0 + at$, να δείξετε ότι $S = \dfrac{v+v_0}{2}t$
- Στο πρόβλημα 5 της Β΄ ομάδας της σελίδας 28 να διευκρινισθεί ότι η ταχύτητα 900km/h του αεροπλάνου αναφέρεται σε κατάσταση νηνεμίας.
- Να μη διδαχθούν οι ασκήσεις 2 και 3 της Β΄ ομάδας της σελίδας 28.

Α.4 (§1.3): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις και προβλήματα των οποίων η επίλυση ανάγεται σε επίλυση εξισώσεων α΄ βαθμού.

Κατά τη διδασκαλία της §Α.4:

- Να δοθεί έμφαση στην **επίλυση προβλημάτων**.
- Να δοθούν στους μαθητές να επιλύσουν και μερικές από τις ακόλουθες εξισώσεις:

i. $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$

ii. $x(x^2-1) - x^3 + x^2 = 0$

iii. $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 0$

iv. $(x-2)^2-(2-x)(4+x)=0$

v. $x(x-2)^2=x^2-4x+4$

vi. $(x^2-4)(x-1)=(x^2-1)(x-2)$

vii. $x^3-2x^2-x+2=0$

viii. $x^3-2x^2-(2x-1)(x-2)=0$

ix. $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x}{x^2-4}$

x. $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{x^2-x}$

xi. $\dfrac{x+1}{x^2-1}+\dfrac{2}{x^2-2x+1}=0$

Α.5 (§ 1.4): Οι μαθητές πρέπει:

i. Να γνωρίζουν πως ορίζεται η διάταξη των πραγματικών αριθμών, καθώς και τις άμεσες συνέπειες του ορισμού αυτού.
ii. Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων σε σχέση με τη διάταξη.
iii. Να μπορούν να αποδεικνύουν απλές ανισότητες.

Κατά τη διδασκαλία της §Α.5:

- Να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα:
  α) Στο $3^{ο}$ παράδειγμα της σελίδας 32 και τις αντίστοιχες ασκήσεις. β) Στην ανισότητα $\alpha^2+\beta^2 \geq 0$ και στην άσκηση 1 της Β΄ ομάδας της σελίδας 37, η οποία προτείνεται να λυθεί με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων. Να τονιστεί ιδιαίτερα ότι:

$$\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \quad \text{και} \quad \beta=0$$
$$\alpha^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0 \quad \text{ή} \quad \beta\neq 0.$$

- Να **μη διδαχθούν** το $1^{ο}$ παράδειγμα της σελίδας 31, το $4^{ο}$ παράδειγμα της σελίδας 33 και οι ασκήσεις 6 και 8 της Α΄ ομάδας της σελίδας 36 και 2 και 3 της Β΄ ομάδας της σελίδας 37.
- Μπορεί, όμως, να δοθεί η ακόλουθη δραστηριότητα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κατασκευάστε μερικά ορθογώνια με διαστάσεις x, y που να έχουν άθροισμα ίσο με $10\,cm$. (Για παράδειγμα: $x=9\ cm$ και $y=1cm$ ή $x=8\ cm$ και $y=2cm$ ή … ή $x=5\ cm$ και $y=5cm$) και διαπιστώστε ότι:

1. Τα εμβαδά τους είναι όλα μικρότερα ή ίσα των $25\,cm^2$.
2. Τα εμβαδά των τετραγώνων με πλευρές τις διαγώνιες των ορθογωνίων είναι μεγαλύτερα ή ίσα των $50\,cm^2$.

Αποδείξτε ότι τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν για κάθε ορθογώνιο με διαστάσεις x, y των οποίων το άθροισμα είναι ίσο με $10\,cm$,ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:

- Εκφράστε το y συναρτήσει του x.
- Εκφράστε το εμβαδόν του ορθογωνίου συναρτήσει του x και αποδείξτε ότι αυτό είναι μικρότερο ή ίσο των $25\,cm^2$.

- Εκφράστε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά τη διαγώνιο του ορθογωνίου συναρτήσει του x και αποδείξτε ότι αυτό είναι μεγαλύτερο ή ίσο των 50 cm^2.

Α.6 (§ 1.5): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:
i. Να επιλύουν ανισώσεις της μορφής $\alpha x+\beta>0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \alpha x+\beta<0$.
ii. Να γράφουν τις λύσεις των ανισώσεων αυτών με μορφή διαστημάτων.

Ενότητα Β: Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες

Στην αρχή της ενότητας αυτής, αφού ορισθεί η έννοια της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και αποδειχθούν οι βασικές της ιδιότητες, διαπιστώνεται ότι η απόσταση δύο σημείων του άξονα είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των τετμημένων τους. Στη συνέχεια εισάγεται η έννοια της νιοστής ρίζας και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες των ριζών.

Στο βιβλίο για λόγους διδακτικούς η νιοστή ρίζα ορίζεται μόνο για μη αρνητικούς αριθμούς.

Τέλος, επιλύεται η εξίσωση β΄ βαθμού με τη χρησιμοποίηση και της διακρίνουσας και υπολογίζονται το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης συναρτήσει των συντελεστών της. Επίσης επιλύονται εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις β΄ βαθμού.

Οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι οι εξής:

Β.1 (§ 1.6): Οι μαθητές πρέπει:
i. Να γνωρίζουν πώς ορίζεται η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού.
ii. Να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες των απόλυτων τιμών.
iii. Να μπορούν να επιλύουν **απλές** εξισώσεις και ανισώσεις με απόλυτες τιμές.
iv. Να γνωρίζουν την έννοια της απόστασης δυο αριθμών.

Κατά τη διδασκαλία της §Β.1:

- Να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική σημασία της απόλυτης τιμής, δηλαδή, ότι η $|\alpha|$ είναι η απόσταση του α από το 0 (συμβολικά $|\alpha|=d(\alpha,0)$), ανεξάρτητα από το αν είναι $\alpha\geq 0$ ή $\alpha<0$. Για την κατανόηση της έννοιας της απόλυτης τιμής να δοθούν στους μαθητές απλά παραδείγματα, όπως:
  α) Να συμπληρωθούν τα δεύτερα μέλη των ισοτήτων χωρίς τις απόλυτες τιμές:
  $|-7|=\ldots$, $|\sqrt{2}-1|=\ldots$, $|3-\pi|=\ldots$, $|\sqrt{2}-2|=\ldots$,
  β) Να εκφράσετε για τις διάφορες τιμές του x τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές:
  $|x+5|=\ldots$, $|x-2|=\ldots$, $|x+5|+|x-2|=\ldots$
- Η απόδειξη της ιδιότητας $|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta$, για $\theta>0$, προτείνεται να γίνει πρώτα γεωμετρικά και έπειτα αλγεβρικά ως εξής:
  Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
  - Αν $x\geq 0$, τότε έχουμε $|x|<\theta \Leftrightarrow x<\theta$ και $x\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq x<\theta$
  -Αν $x<0$, τότε έχουμε $|x|<\theta \Leftrightarrow -x<\theta$ και $x<0 \Leftrightarrow -\theta<x<0$
  Επομένως, η $|x|<\theta$ αληθεύει για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει $-\theta<x<\theta$, δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta.$$

- Η απόδειξη της ιδιότητας $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$ να δοθεί ως άσκηση και να εξαιρεθεί από την εξεταστέα ύλη.
- Η απόδειξη της ιδιότητας $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ προτείνεται να γίνει ως εξής: Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

  -Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0,$ τότε $\alpha\beta \geq 0$, οπότε
$$|\alpha\beta| = \alpha\beta = |\alpha||\beta|$$
  -Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha\beta \leq 0$, οπότε
$$|\alpha\beta| = -\alpha\beta = \alpha(-\beta) = |\alpha||\beta|$$
  -Αν $\alpha < 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\alpha\beta \leq 0$, οπότε
$$|\alpha\beta| = -\alpha\beta = (-\alpha)\beta = |\alpha||\beta|$$
  -Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha\beta > 0$, οπότε
$$|\alpha\beta| = \alpha\beta = (-\alpha)(-\beta) = |\alpha||\beta|.$$
- Ομοίως εργαζόμαστε για την απόδειξη της $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.
- Η απόδειξη της ιδιότητας $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ **να παραλειφθεί**. Να διαπιστωθεί όμως με παραδείγματα ότι:
$$\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$
  και να τονιστεί ότι, όπως μάθαμε στο Γυμνάσιο:

  -Όταν οι αριθμοί είναι ομόσημοι, τότε ισχύει η δεξιά ισότητα και η αριστερή ανισότητα

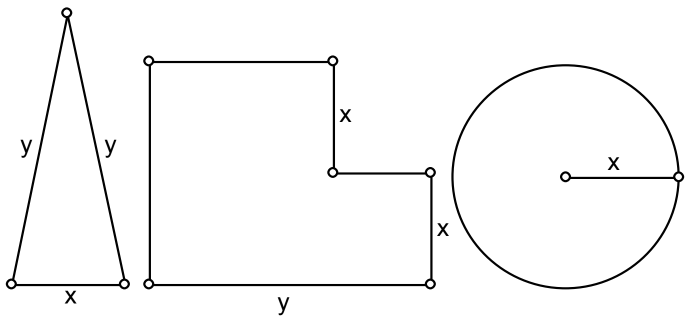
  -Όταν οι αριθμοί είναι ετερόσημοι, τότε ισχύει η αριστερή ισότητα και η δεξιά ανισότητα και

  -Όταν ένας από τους αριθμούς είναι ίσος με 0, τότε ισχύουν και οι δυο ισότητες.
- Να **μη διδαχθούν** οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας της σελίδας 43.
- Να δοθούν, όμως, ως εφαρμογές των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, οι ακόλουθες ασκήσεις:

  α) Να λυθούν πρώτα γεωμετρικά και έπειτα αλγεβρικά οι εξισώσεις:

  i) $|x-1| = |x-3|$ ii) $|x-2| = 2|x+1|$.

  β) Αν $|x-2| < 0{,}1$ και $|y-4| < 0{,}2$ να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:



- Τέλος, μπορεί να δοθεί η ακόλουθη δραστηριότητα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:
Χαράξτε έναν άξονα και πάρτε πάνω σ' αυτόν τα σημεία Α Β και Μ με συντεταγμένες 1, 2 και x αντιστοίχως, για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha)\ x<1,\quad \beta)\ x=1,\quad \gamma)\ 1<x<2,\quad \delta)\ x=2,\quad \varepsilon)\ 2<x$$

Α) 1) Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι παραστάσεις $|x-1|$ και $|x-2|$ και τι παριστάνει η παράσταση $|x-1|+|x-2|$.

2) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|x-1|+|x-2|$ και πότε αυτή παρουσιάζεται;

3) Παίρνει η παράσταση αυτή μέγιστη τιμή;

Β) 1) Τι παριστάνει γεωμετρικά η παράσταση $\left||x-1|-|x-2|\right|$;

2) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη τιμή της παράστασης. $\left||x-1|-|x-2|\right|$ και πότε αυτές παρουσιάζονται;

Β.2 (§ 1.7): Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια του συμβόλου $\sqrt[\nu]{a}$, $(\alpha \geq 0)$.

i. Να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες των ριζών.

ii. Να μπορούν να μετατρέπουν απλές παραστάσεις με άρρητους παρανομαστές σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές.

iii. Να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $x^\nu = \alpha$.

Κατά την διδασκαλία της §Β.2:

- Η άσκηση 6 της Α΄ ομάδας της σελίδας 36 και η άσκηση 4 της Β΄ ομάδας της σελίδας 51 μπορούν να δοθούν ως ενιαία εργασία στους μαθητές με την εξής διατύπωση:

«Για θετικούς αριθμούς α, β με α<β να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha \leq \dfrac{\alpha+\beta}{2} \leq \beta$

β) $\alpha \leq \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \beta$

γ) $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha\beta} \leq \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ ».

- Να **μη διδαχθούν** οι ασκήσεις 5 και 6 της Β΄ ομάδας των σελίδων 51 και 52.

Β.3 (§ 4.1): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να βρίσκουν τον τύπο που δίνει τις ρίζες μιας εξίσωσης β΄ βαθμού.

ii. Να κατανοήσουν και να συνειδητοποιήσουν τη σχέση που συνδέει το πρόσημο της διακρίνουσας και το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης β΄ βαθμού.

iii. Να χρησιμοποιούν σωστά και με ευχέρεια, όταν είναι απαραίτητο, τον τύπο που δίνει τις ρίζες μιας εξίσωσης β΄ βαθμού.

iv. Να επιλύουν προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις β΄ βαθμού. Για την προπαρασκευή της διδασκαλίας της παραγράφου αυτής κρίνεται σκόπιμο να δοθεί ως άσκηση στην τάξη η λύση της εξίσωσης $x^\nu = a$,με ν=2 και α>0, ώστε οι μαθητές να θυμηθούν ότι αυτοί έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $\sqrt{a}, -\sqrt{a}$

Κατά τη διδασκαλία της §Β.3 **να μη διδαχθούν** το παράδειγμα 2.ii) και οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας της σελίδας 122.

Β.4 (§ 4.2): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να αποδεικνύουν τους τύπους που εκφράζουν το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας εξίσωσης β΄ βαθμού, αφού βέβαια τονιστεί ότι πρέπει $\Delta \geq 0$.

ii. Να χρησιμοποιούν με ευχέρεια τους τύπους του αθροίσματος και του γινομένου των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Κατά τη διδασκαλία της §Β.4 **να μη διδαχθούν** το $1^{ο}$ παράδειγμα και οι ασκήσεις 1 iii) και iv), 4 ii) και iii), 5 και 6 της Α΄ ομάδας και όλες οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας των σελίδων 124 και 125.

Β.5 (§ 4.3): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$$

$$\alpha x^{2\nu} + \beta x^{\nu} + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$$

καθώς και ρητές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις β΄ βαθμού.

Ενότητα Γ: Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες

Στην αρχή της ενότητας εισάγεται ή έννοια του συνόλου, οι βασικές πράξεις των συνόλων και ορίζεται η συνάρτηση με τη βοήθεια ορολογίας των συνόλων.

Στη συνέχεια επαναλαμβάνονται τα γνωστά από το Γυμνάσιο για τις καρτεσιανές συντεταγμένες και εξετάζονται οι συντεταγμένες σημείων συμμετρικών ως προς τους άξονες, ως προς την αρχή των αξόνων και ως προς τη διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων. Οι ιδιότητες των συντεταγμένων των σημείων αυτών χρησιμοποιούνται για την κατανόηση παρακάτω της άρτιας συνάρτησης, της περιττής συνάρτησης κτλ., καθώς και των ιδιοτήτων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Τέλος επαναλαμβάνεται η μελέτη της συνάρτησης y = αx + β, που είναι γνωστή από το Γυμνάσιο, και διατυπώνεται η συνθήκη παραλληλίας δύο ευθειών. Με την βοήθεια της θα αποφανθούμε επόμενη ενότητα πότε ένα γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση και πότε είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι οι εξής:

Γ.1 (§2.1): Οι μαθητές πρέπει:

i. Να μπορούν να παριστάνουν ένα σύνολο με περιγραφή ή αναγραφή των στοιχείων του καθώς και με τα διαγράμματα του Venn.

ii. Να μπορούν να διακρίνουν αν δύο σύνολα είναι ίσα και αν ένα σύνολο είναι υποσύνολο άλλου συνόλου.

iii. Να γνωρίζουν την έννοια του κενού συνόλου.

iv. Να γνωρίζουν τις έννοιες: ένωση συνόλων, τομή συνόλων, διαφορά συνόλων και συμπλήρωμα συνόλου και να τις παριστάνουν με διαγράμματα του Venn.

Η διδασκαλία της παραγράφου Γ.1 σε καμία περίπτωση **δεν πρέπει** να πάρει θεωρητική μορφή.

Γ.2 (§2.2): Οι μαθητές πρέπει:

i. Να γνωρίζουν τον ορισμό και το συμβολισμό της συνάρτησης.

ii. Να μπορούν να βρίσκουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης όταν δίνεται ο τύπος με τον οποίο ορίζεται το f(x).

iii. Να μπορούν να υπολογίζουν τις τιμές μιας συνάρτησης f για τις διάφορες τιμές του x.

Γ.3 (§2.3): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να παριστάνουν ένα ζεύγος αριθμών με σημείο του επιπέδου. Στη σελίδα 70 να γίνει αντιδιαστολή μεταξύ του συνόλου {α, β} και του διατεταγμένου ζεύγους (α, β).

ii. Να βρίσκουν το συμμετρικό ενός σημείου Α (x, y), ως προς τους άξονες, την αρχή των αξόνων και ως προς τη διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

iii. Να υπολογίζουν την απόσταση δύο σημείων.

iv. Να αναγνωρίζουν, αν μία καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

v. Να βρίσκουν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τους δύο άξονες.

Γ.4 (§2.4): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να σχεδιάζουν τις ευθείες y = αx, y = αx + β. Για το σκοπό αυτό να δοθούν ως παραδείγματα στην τάξη η σχεδίαση των ευθειών:

$$y=\pm 3x,\ y=\pm\frac{1}{3}x,\ y=\pm 3x+1$$

ii. Να αναγνωρίζουν πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες.

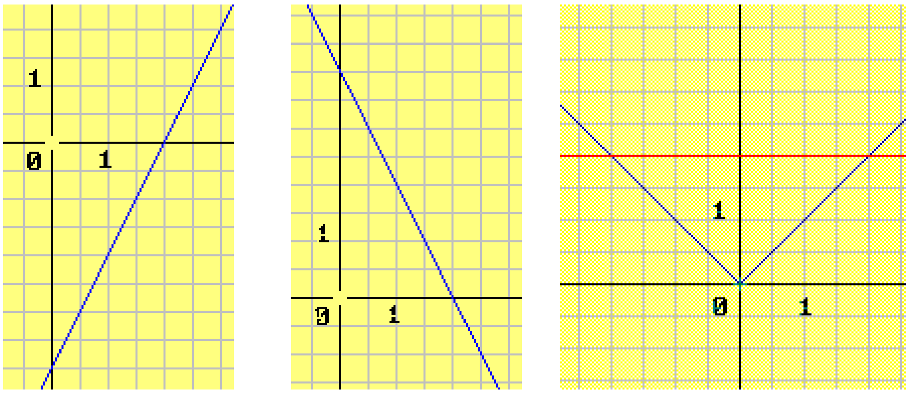
Κατά τη διδασκαλία της Γ.4:

- Να επιλυθούν γραφικά ανισώσεις της μορφής:

  $$\alpha x+\beta>0 \quad ή \quad \alpha x+\beta<0 \quad ή \quad |x|<\theta \quad ή \quad |x|>\theta$$

  όπως για παράδειγμα οι ανισώσεις:

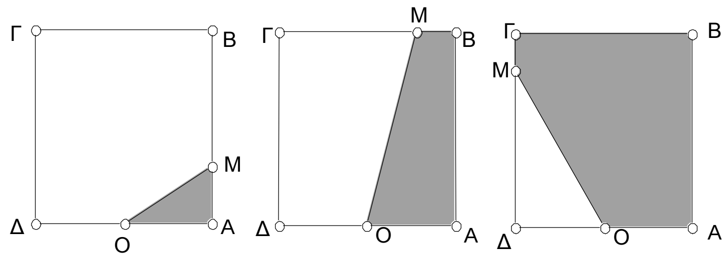
  $$2x-4>0, \quad -2x+4>0 \quad , \quad |x|<2 \quad και \quad |x|>2.$$



- **Να μη διδαχτεί** η υποπαράγραφος «ευθείες κάθετες», το παράδειγμα 4 της σελίδας 76 και οι ασκήσεις 1ii), 1iii) και 3 της Β΄ ομάδας της σελίδας 78.
- Μπορεί, όμως, να δοθεί η παρακάτω δραστηριότητα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 20 cm και το μέσον Ο της ΑΔ. Ένα κινητό σημείο Μ ξεκινά από το Α και, διαγράφοντας την πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ, καταλήγει στο Δ.



Αν με x συμβολίσουμε το μήκος της διαδρομής που έκανε το κινητό Μ και με $f(x)$ το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου,

α) Να βρείτε τον τύπο της f ,

β) Να παραστήσετε γραφικά την f ,

γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ισχύει $f(x) = 120\,\text{cm}^2$.

Ενότητα Δ: Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες.

Και η ενότητα αυτή είναι, κατά το μεγαλύτερο μέρος της, **επανάληψη** της αντίστοιχης ενότητας της Γ΄ Γυμνασίου.

Στην αρχή της ενότητας γίνεται γραφική ερμηνεία της λύσης ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, προκειμένου να κατανοήσουν οι μαθητές ότι εκτός από την περίπτωση μίας λύσης, ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Συγχρόνως **επαναλαμβάνονται** οι γνωστές αλγεβρικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η διερεύνηση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Για τη διερεύνηση αυτή χρησιμοποιείται η έννοια της ορίζουσας 2x2 έτσι, ώστε τα σχετικά συμπεράσματα να είναι ευκολομνημόνευτα από τους μαθητές.

Ακολουθεί η παρουσίαση και επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Από τις διάφορες μεθόδους επίλυσης τέτοιων συστημάτων χρησιμοποιείται μόνο η μέθοδος των διαδοχικών απαλοιφών αγνώστων με την βοήθεια των αντίθετων συντελεστών, ώστε να προκύψει ένα κλιμακωτό σύστημα. Η μέθοδος αυτή αποτελεί τη βάση για την επίλυση τέτοιων συστημάτων με την βοήθεια των Η/Υ.

Δε γίνεται διερεύνηση τέτοιων συστημάτων στη γενική μορφή, αλλά εξετάζονται συστήματα με αριθμητικούς συντελεστές και διαπιστώνεται αν έχουν μοναδική λύση ή αν είναι αδύνατα ή έχουν άπειρο πλήθος λύσεων.

Δε κρίνεται σκόπιμο σε καμία περίπτωση να επεκταθεί η διδασκαλία της ενότητας σε θέματα που δεν περιλαμβάνονται στο διδακτικό βιβλίο.

Οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι οι εξής:

Δ.1 (§3.1): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να παριστάνουν γραφικά τις λύσεις μιας εξίσωσης της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma \quad \mu\varepsilon \quad \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

ii. Να επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

iii. Να επιλύουν **προβλήματα** με την βοήθεια ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Δ.2 (§3.2): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο των οριζουσών.

Κατά τη διδασκαλία της §Δ.2:

- Να δοθεί **μόνο ο πίνακας διερεύνησης** ως εξής:

> Το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$,
>
> - αν $D \neq 0$, τότε έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{D_x}{D}, y = \dfrac{D_y}{D}$
> - αν D=0, τότε είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

και να τονιστεί η γεωμετρική ερμηνεία κάθε συμπεράσματος, αφού πρώτα οριστούν οι ορίζουσες D, D_x και D_y .

- Πριν από την εφαρμογή της διερεύνησης συστήματος του βιβλίου **είναι σκόπιμο** να λυθούν απλούστερα παραδείγματα συστημάτων 2x2 με παράμετρο, όπως για παράδειγμα:

i. Για ποια τιμή του λ έχει άπειρες λύσεις το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x - 3y = 4 \\ x - y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

ii. Για ποιες τιμές του λ είναι αδύνατο το σύστημα:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = \lambda \end{cases}$$

iii. Υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση;

$$\begin{cases} x + 2y = \lambda \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

Σε καμία περίπτωση **να μη καθυστερήσει** η διδασκαλία με την επίλυση πολύπλοκων συστημάτων με παράμετρο.

- **Να μη διδαχτούν** οι ασκήσεις 6 της Α΄ ομάδας και 1 της Β΄ ομάδας της σελ. 109.

Δ.3 (§3.3): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να επιλύουν ένα σύστημα τριών γραμμικών εξισώσεων με τρεις αγνώστους με τη μέθοδο των διαδοχικών απαλοιφών.

ii. Να διαπιστώνουν, αν ένα τέτοιο σύστημα έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.
iii. Να επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια ενός συστήματος.

Κατά τη διδασκαλία της Δ.3 **να μη διδαχθούν** οι ασκήσεις 1 και 2 της Β΄ ομάδας της σελ. 114.

Δ.4 (§4.3): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν αλγεβρικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους στα οποία η μία είναι εξίσωση α΄ βαθμού και η άλλη β΄ βαθμού ή και οι δυο εξισώσεις β΄ βαθμού. Η γεωμετρική επίλυση μερικών από αυτά προτείνεται να γίνει μετά τη διδασκαλία της μελέτης συνάρτησης.

Για την κατανόηση των συστημάτων β΄ βαθμού και το ρόλο των παραμέτρων, είναι σκόπιμο, όπου είναι δυνατόν, να υπάρχει γεωμετρική ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Για το σκοπό αυτό μπορεί να δοθεί η ακόλουθη δραστηριότητα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:

Στο καρτεσιανό επίπεδο πάρτε το σημείο Α(1,1) και χαράξτε τον κύκλο C με κέντρο O και ακτίνα R = (OA). Χαράξτε επιπλέον την ευθεία ε με εξίσωση $x+y=\mu,\ \mu>0$ για μια τυχαία τιμή του μ.

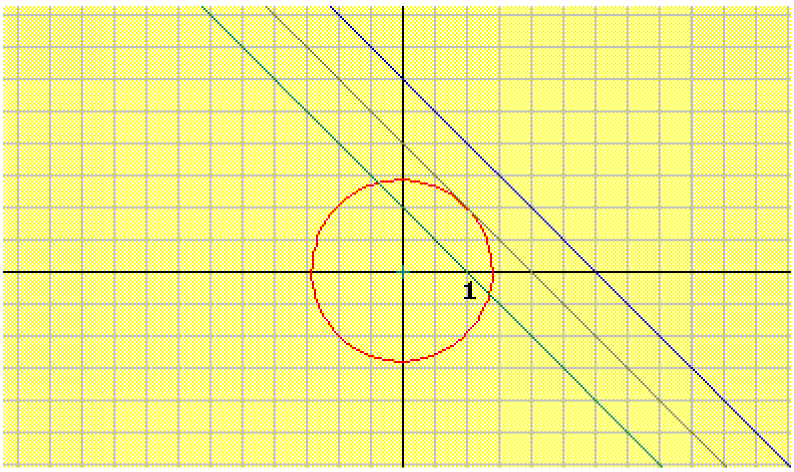
Α) α) Υπολογίστε την ακτίνα του κύκλου

β) Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η απόσταση του O από την ευθεία ε είναι ίση με

$$d=\frac{\mu\sqrt{2}}{2}$$

γ) Αποδείξτε ότι:

- Η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο όταν $\mu>2$.
- Η ευθεία και ο κύκλος εφάπτονται όταν μ=2.
- Η ευθεία και ο κύκλος τέμνονται όταν 0<μ<2.



Β) α) Αποδείξτε ότι ένα σημείο Μ (x,y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση:

$$x^2+y^2=2.$$

β) Καταλήξτε στα ίδια συμπεράσματα για τις σχετικές θέσεις της ευθείας και του κύκλου λύνοντας το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=\mu \end{cases}$$

Ενότητα Ε: Προτείνεται να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες

Στην αρχή της ενότητας με τη βοήθεια παραδειγμάτων κατά-νοείται η σκοπιμότητα και η αναγκαιότητα της μελέτης συνάρτησης για την ακριβέστερη σχεδίαση της γραφικής της παράστασης. Έτσι, εισάγονται οι έννοιες της άρτιας και περιττής συνάρτησης, της γνησίως μονότονης συνάρτησης, καθώς και η έννοια του μέγιστου και του ελαχίστου μιας συνάρτησης. Με τη βοήθεια των εννοιών αυτών γίνεται η μελέτη και η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$f(x) = ax^2 \text{ .και } f(x) = \frac{a}{x}.$$

Ακολουθεί η μελέτη της συνάρτησης:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ , με } \alpha \neq 0,$$

και τα συμπεράσματα της μελέτης χρησιμοποιούνται σε διάφορες εφαρμογές, όπως είναι η εύρεση ακροτάτων συνάρτησης και η επίλυση των ανισώσεων $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \geq 0$ ή ≤ 0.

Τέλος, μελετάται το πρόσημο της συνάρτησης:

$$f(x) = P_1(x)P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_\nu(x),$$

της οποίας οι παράγοντες είναι πολυώνυμα α΄ βαθμού ή β΄ βαθμού με αρνητική διακρίνουσα. Με τη βοήθεια της παραπάνω μελέτης επιλύονται ανισώσεις των μορφών:

$$P_1(x)P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_\nu(x) \geq 0 \text{ ή } \leq 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ ή } \leq 0.$$

Ειδικότερα, οι στόχοι που περιγράφονται κατά παράγραφο είναι οι εξής:

Ε.1 (§2.5): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να αναγνωρίζουν αν μία συνάρτηση είναι άρτια ή αν είναι περιττή και να διαπιστώνουν τις αντίστοιχες συμμετρίες στη γραφική παράσταση.

ii. Να βρίσκουν τα διαστήματα μονοτονίας απλών συναρτήσεων.

iii. Να βρίσκουν τα ακρότατα απλών συναρτήσεων.

iv. Να μελετούν τις συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2$ και $f(x) = \frac{\alpha}{x}$,με $\alpha \neq 0$ και να σχεδιάζουν τις γραφικές τους παραστάσεις.

Κατά τη διδασκαλία της §Ε.1 πρέπει να κυριαρχεί η εποπτεία. Οι έννοιες της άρτιας συνάρτησης, της περιττής συνάρτησης, της γνησίως μονότονης συνάρτησης και των ακρότατων συνάρτησης μπορούν να κατανοηθούν στην τάξη αυτή μέσα από τις γραφικές παραστάσεις. Σε καμία περίπτωση η διδασκαλία **δεν πρέπει** να πάρει θεωρητική μορφή, διότι στην τάξη αυτή οι μαθητές δεν έχουν την απαραίτητη ωριμότητα και δεν διαθέτουν τις γνώσεις για να κατανοήσουν τις αφηρημένες αυτές έννοιες (βλέπε και πρόταση για το μάθημα αυτό στις σελίδες 24 - 29 του κειμένου).

Η διδασκαλία της παραγράφου Ε.1 **να γίνει** σύμφωνα με τις οδηγίες που ακολουθούν:

1) Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης.
2) Άρτια – Περιττή συνάρτηση
3) Οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $f(x) = \alpha x^2,\ \alpha > 0$
4) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2,\ \alpha < 0$

5) Οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και $f(x)=\dfrac{\alpha}{x},\ \alpha>0$

6) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x},\ \alpha<0$

1) Η μελέτη της μονοτονίας και των ακροτάτων **προτείνεται να γίνει** όπως παρουσιάζεται στις σελίδες 14 έως και 17.

2) Η μελέτη της άρτιας και της περιττής συνάρτησης **προτείνεται να γίνει** ως εξής:

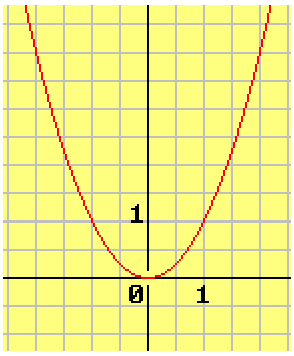
Άρτια Συνάρτηση

- Στην αρχή να δοθεί η γραφική παράσταση C μιας άρτιας συνάρτησης σε ένα σύνολο Α, όπως της συνάρτησης του παρακάτω σχήματος α) και να ζητηθεί από τους μαθητές να διαπιστώσουν ότι:

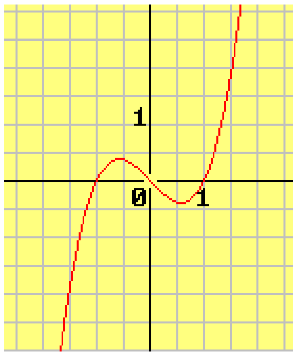
i. Η C έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

ii. Το πεδίο ορισμού της *f* έχει κέντρο συμμετρίας το 0 και επιπλέον ότι οι τιμές της στα αντίθετα x είναι ίσες, δηλαδή ότι για κάθε $x\in \mathrm{A}$ ισχύει:

$$-x\in \mathrm{A} \quad \text{και} \quad f(-x)=f(x).$$



Σχήμα (α)



Σχήμα (β)

- Στη συνέχεια να δοθεί ο ορισμός της άρτιας συνάρτησης και να τονιστεί ότι οι άρτιες συναρτήσεις έχουν αντίθετο είδος μονοτονίας σε συμμετρικά, ως προς το 0, διαστήματα του πεδίου ορισμού. Έτσι, ενώ στο $(0,+\infty)$ η f του παραπάνω Σχήματος (α) είναι γνησίως αύξουσα, στο $(-\infty,0)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως, η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης μπορεί να γίνει πρώτα για τις μη αρνητικές τιμές του x και στη συνέχεια για όλες τις τιμές του x.
- Τέλος, να ζητηθεί από τους μαθητές να αποδείξουν ότι η

$$f(x)=x^2 \quad \text{και γενικά η} \quad f(x)=\alpha x^2$$

είναι άρτιες συναρτήσεις.

Περιττή συνάρτηση

- Να παρουσιαστεί αναλόγως με τη βοήθεια του παραπάνω Σχήματος (β).

- Στη συνέχεια να δοθεί στους μαθητές να αποδείξουν ότι η

$$f(x)=x^3 \text{ και γενικά η } f(x)=\alpha x^3,$$

καθώς και η

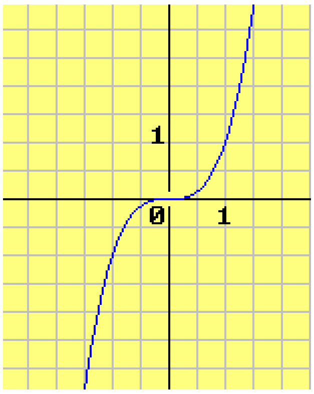
$$f(x)=\frac{1}{x}, \text{ και γενικά η } f(x)=\frac{\alpha}{x}$$

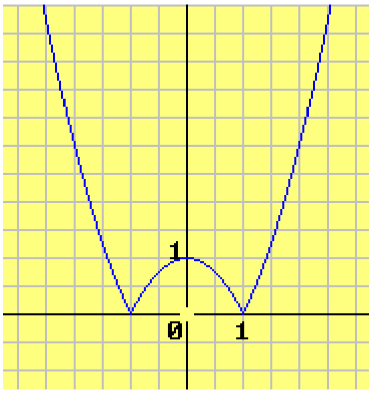
είναι περιττές συναρτήσεις.

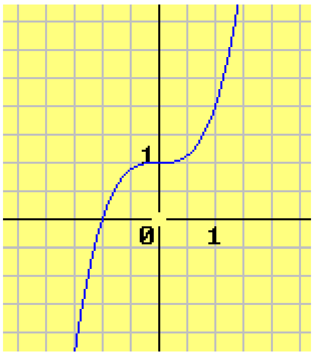
- Μετά τη διδασκαλία των εννοιών άρτια - περιττή συνάρτηση να δοθούν ως **ασκήσεις για το σπίτι** οι ακόλουθες:

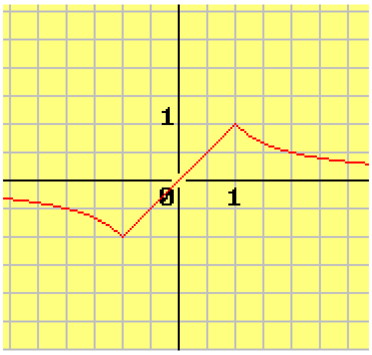
i. Η άσκηση 11 της Α΄ ομάδας της σελίδας 93.

ii. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές;



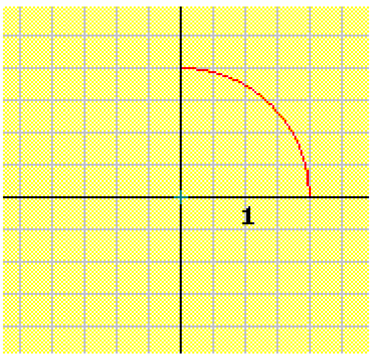


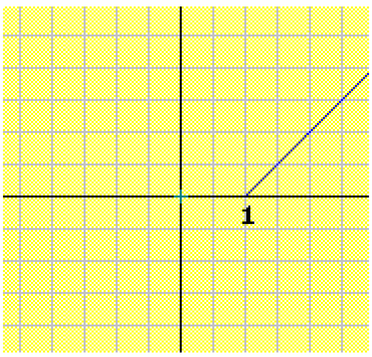


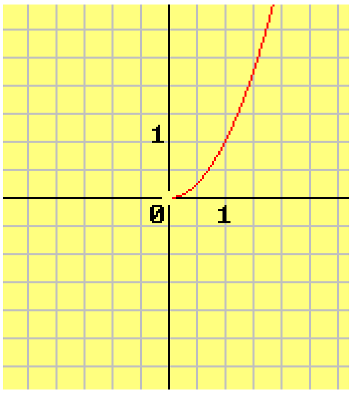


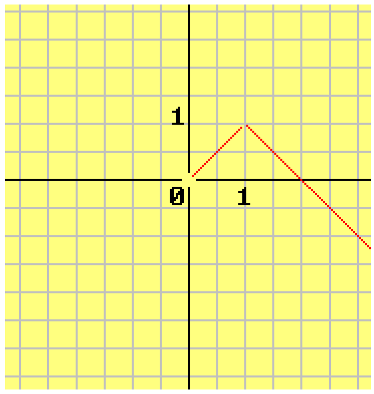
iii. Η άσκηση 13 της Α΄ ομάδας της σελίδας 93.

iv. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις:
α) άρτιας συνάρτησης και β) περιττής συνάρτησης.









v. Οι ασκήσεις 9 και 10 i), 10 ii) και 12 της Α΄ ομάδας της σελίδας 93.

Να **μη διδαχθούν** οι ασκήσεις 10iii) και 10ιv) της Α΄ ομάδας των σελίδων 93.

3. Η μελέτη της συνάρτησης $f(x)=x^2$ **προτείνεται να γίνει** ως εξής:
α) Αποδεικνύουμε ότι η f είναι άρτια και επομένως έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

β) Μελετούμε την f στο διάστημα $0,+\infty$ και χαράζουμε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα αυτό.

γ) Κάνοντας χρήση της παραπάνω συμμετρίας, χαράζουμε τη γραφική παράσταση της f σε όλο το $\mathbb{R}$ και εξάγουμε τα συμπεράσματα για τη μονοτονία και τα ακρότατα αυτής.

4. Για τη μελέτη της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Κατά τη διδασκαλία της §Ε.1 να **μη διδαχτούν** η άσκηση 2 της Α΄ ομάδας της σελίδας 92 και οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας της σελίδας 94.

Function probe, Μελέτη της συνάρτησης $\boldsymbol{y=\dfrac{\alpha}{x}}$ σελ. 80-84 (αφορά τη §2.5 σχολ. βιβλίου)

Ε.2 §(4.4): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να γράφουν ένα τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0,$ στη μορφή
$f(x)=\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$ και, ανάλογα με το πλήθος των ριζών του, σε μία από τις ακόλουθες μορφές

$$f(x)=a(x-\rho_1).(x-\rho_2),$$
$$f(x)=a(x-\rho)^2$$
$$f(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha}$$

και να τις χρησιμοποιούν όταν χρειάζεται (π.χ. εύρεση ακροτάτων τριωνύμου, απλοποίηση κλασματικών παραστάσεων κτλ.

ii. Να παριστάνουν γραφικά συναρτήσεις μορφής f (x) = φ (x) ± c.

iii. Να παριστάνουν γραφικά συναρτήσεις μορφής f (x) = φ (x ± c).

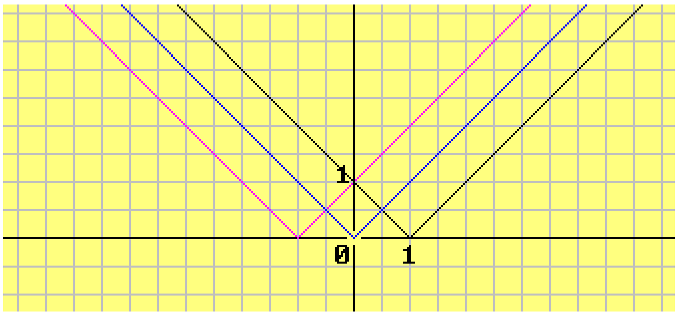
iv. Να κάνουν τη μελέτη και τη γραφική παράσταση της $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $α\neq 0$.

v. Να επιλύουν γραφικά την εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$, $α\neq 0$.

Κατά τη διδασκαλία της §Ε.2:

- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f(x)=φ(x) ± c, c>0, που είναι κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες άνω ή κάτω, δεν παρουσιάζει δυσκολίες κατανόησης. Μεγάλες, όμως, δυσκολίες κατανόησης παρουσιάζονται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = φ(x ± c), c>0, που είναι οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες αριστερά ή δεξιά. Γι' αυτό πρέπει να γίνει προετοιμασία των μαθητών με κατάλληλα απλά παραδείγματα, όπως:

  α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
  $$f(x)=|x|,\quad g(x)=|x-1|,\quad h(x)=|x+1|.$$



  β) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών των συναρτήσεων:
  $$\phi(x)=2x^2,\quad f(x)=2(x-3)^2,\quad g(x)=2(x+3)^2.$$
  Τι παρατηρείτε;

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\phi(x)=2x^2$	50	32	18	8	2	0	2	8	18	32	50
$f(x)=2(x-3)^2$	128	98	72	50	32	18	8	2	0	2	8
$g(x)=2(x+3)^2$	8	2	0	2	8	18	32	50	72	98	128

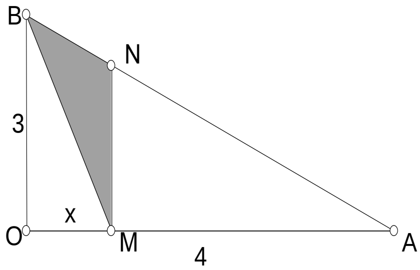
[Οι τιμές της f ακολουθούν με διαφορά τριών βημάτων, ενώ οι τιμές της g προηγούνται κατά τρία βήματα]

- Στο λυμένο πρόβλημα της σελίδας 135, αμέσως μετά τον μετασχηματισμό του τριωνύμου f(x), στη μορφή $f(x)=2(x-3)^2+1$, να επισημανθεί ότι η συνάρτηση έχει για $x=3$ ελάχιστο, το $f(3)=1$. Με τη μέθοδο αυτή να γίνουν και άλλες εφαρμογές υπολογισμού του ακροτάτου ενός τριωνύμου.

- Οι μαθητές πρέπει με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου ή με τη βοήθεια των πινάκων των σελίδων 136 και 137 να μπορούν να βρίσκουν το ακρότατο ενός τριωνύμου και να κατανοήσουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι η παραβολή $y = \alpha x^2$ παράλληλα μετατοπισμένη σε μια άλλη θέση με κορυφή το σημείο $K(\frac{-\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha})$.

- Προτείνεται να δοθεί η ακόλουθη δραστηριότητα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:



Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο, το M είναι τυχαίο σημείο της OA και

MN//OB. Αν (OA)=4, (OB)=3 και (OM)=x, και E(x) είναι το εμβαδόν του τριγώνου BMN,

α) Να αποδείξετε ότι:

$$(MN) = \frac{3(4-x)}{4} \quad \text{και} \quad E(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$$

β) Να βρείτε τη θέση του M για την οποία το εμβαδόν E(x) μεγιστοποιείται. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του E(x);

🖳 **Function probe,** Βολή - Δευτεροβάθμιες εξισώσεις σελ. 40-43 (αφορά την §4.4 σχολ. βιβλίου)
Η πρόσκληση σελ. 44-46 (αφορά την §4.4 σχολ. βιβλίου)
Μετασχηματισμοί στη συνάρτηση $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}^2 + \beta \boldsymbol{x} + \gamma$ σελ. 50-52 (αφορά την §4.4 σχολ. βιβλίου)
Οικογένειες παραβολών σελ. 48-51 (αφορά την §4.4 σχολ. βιβλίου)

Ε.3 (§4.5): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να αποδεικνύουν τα συμπεράσματα που αναφέρονται στο πρόσημο τριωνύμου και να επιλύουν ανισώσεις β' βαθμού χρησιμοποιώντας αυτά τα συμπεράσματα.
Τα συμπεράσματα για το πρόσημο του τριωνύμου να εξαχθούν μόνο με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης του τριωνύμου και να μη γίνει η αλγεβρική απόδειξη.

Ε.4 (§4.5): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να βρίσκουν το πρόσημο του πολυωνύμου $f(x) = P_1(x).P_2(x).....P_\nu(x)$ και να επιλύουν ανισώσεις της μορφής:

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot ...P_\nu(x) \geq 0 \text{ ή } \leq 0 \quad \text{και} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ ή } \leq 0$$

Η εύρεση του πρόσημου του $f(x) = P_1(x).P_2(x).....P_\nu(x)$ μπορεί να γίνει και ως εξής:

- Βρίσκουμε τις ρίζες των παραγόντων $P_1(x), P_2(x), ...\ P_\nu(x)$ και τις τοποθετούμε πάνω σε έναν άξονα κατά τάξη μεγέθους.

- Στο διάστημα που είναι δεξιά της μεγαλύτερης ρίζας θέτουμε ως πρόσημο του $f(x)$ το πρόσημο του γινομένου των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων των παραγόντων $P_1(x), P_2(x), \ldots$ και $P_\nu(x)$.
- Στα υπόλοιπα διαστήματα το πρόσημο του $f(x)$ καθορίζεται ακολουθώντας τον επόμενο κανόνα:
  «Όταν μεταβαίνουμε από ένα διάστημα στο αμέσως προηγούμενο ,αν η πολλαπλότητα της ρίζας που χωρίζει τα διαστήματα είναι περιττός αριθμός ,τότε αλλάζουμε το πρόσημο, αν όμως είναι άρτιος αριθμός, τότε διατηρούμε το ίδιο πρόσημο».

Σύμφωνα με τα παραπάνω, επειδή το πολυώνυμο:

$$f(x) = (-x^2+4)(x^2-3x+2)(x^2+x+1)$$

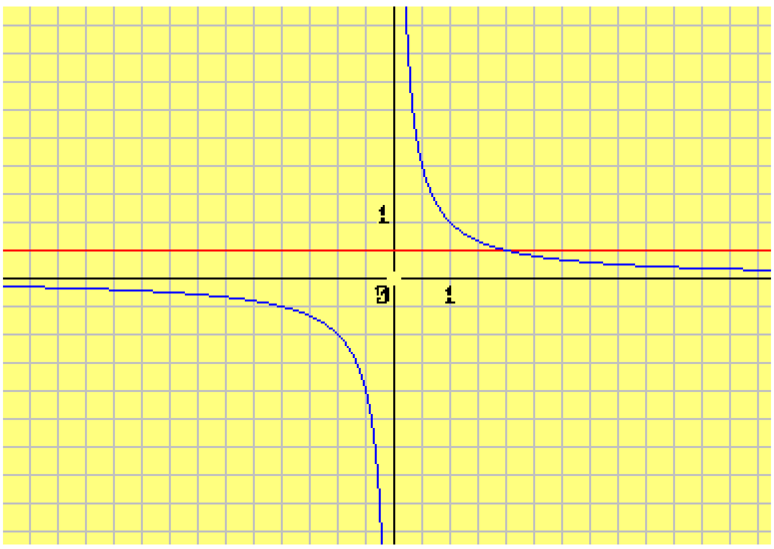
έχει ρίζες τις -2, 1 και 2 (διπλή), και επειδή το πρόσημο του γινομένου των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων των παραγόντων του είναι αρνητικό, το πρόσημο του $f(x)$ θα δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

x		-2		1		2	
$f(x)$	–	0	+	0	–	0	–

Έτσι, η ανίσωση $f(x) \geq 0$ αληθεύει μόνο αν $x \in [-2,1] \cup \{2\}$.

Κατά τη διδασκαλία της Ε.4 **να μη διδαχτούν** οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας της σελίδας 152 .Να επιλυθούν όμως γραφικά ανισώσεις, όπως για παράδειγμα οι:

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{2} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{x} > \frac{1}{2}.$$



Ενότητα ΣΤ: Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες.
(Αν ο διαθέσιμος χρόνος δεν επαρκεί για την ολοκλήρωση της διδασκαλίας της ενότητας θα πρέπει να διατεθούν οι απαιτούμενες ώρες στις αρχές του επόμενου σχολικού έτους).

Στην αρχή της ενότητας επαναλαμβάνονται οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών οι οποίοι είναι γνωστοί από το Γυμνάσιο.

Στη συνέχεια, αφού γενικευθεί η έννοια της γωνίας, ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου και αποδεικνύονται οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Ακολουθεί η αναγωγή του υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας στο 1^o τεταρτημόριο.

Ειδικότερα, οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι:

ΣΤ.1: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

i. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου καθώς και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.
ii. Τη σχέση που συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο των 360^o .
iii. Την έννοια του τριγωνομετρικού κύκλου και τον τρόπο που παριστάνονται σ' αυτόν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε μοίρες ή ακτίνια.

ΣΤ.2: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν να αποδεικνύουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες και να τις χρησιμοποιούν:
i. Για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών όταν δίνεται ένας από αυτούς και
ii. Για να αποδεικνύουν άλλες ταυτότητες. Έτσι δίνεται η ευκαιρία για άσκηση στον αλγεβρικό λογισμό και την αποδεικτική διαδικασία.

ΣΤ.3: Οι μαθητές πρέπει:

i. Να γνωρίζουν τις σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών.
- Αντιθέτων
- Με άθροισμα 180^o
- Που διαφέρουν κατά 180^o
- Με άθροισμα 90^o

ii. Να μπορούν να χρησιμοποιούν τις προηγούμενες σχέσεις για την αναγωγή του υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας στον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας από 0^o μέχρι 90^o .

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ: Ώρες 2/3 εβδομαδιαίως

Κατά το σχολικό έτος 2009-2010 θα διδαχθεί το βιβλίο Ευκλείδεια Γεωμετρία των Αργυροπούλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάτη Σ. και Σίδερη Π. Το βιβλίο αυτό συνοδεύεται και από βιβλίο του καθηγητή, στο οποίο υπάρχουν αναλυτικές οδηγίες για την διδασκαλία. Από το βιβλίο θα διδαχθούν στην Α΄ τάξη του ΕΠΑ.Λ. τα Κεφάλαια 1-8. Στη συνέχεια, προτείνεται μια ενδεικτική κατανομή των ωρών διδασκαλίας ανά Κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Η διδασκαλία του Κεφαλαίου 2 πρέπει να έχει **χαρακτήρα επανάληψης** και ο διδάσκων να επιμείνει μόνο στην κατανόηση των βασικών εννοιών.

Cabri **II,** Δραστηριότητα 1α και 1β σελ. 11-12 (αφορά §2.16 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: (Προτείνεται να διατεθούν 16-18 διδακτικές ώρες)

Δε θα διδαχθούν:

- Οι αποδείξεις των θεωρημάτων των §3.2, 3.3, 3.4
- Η απόδειξη του Θεωρήματος της §3.5
- Οι αποδείξεις των θεωρημάτων I & II της §3.6
- Η απόδειξη του Θεωρήματος της §3.10
- Η απόδειξη του Θεωρήματος της §3.11
- Η απόδειξη του Θεωρήματος της §3.12
- Οι αποδείξεις του θεωρημάτων της §3.13
- Η απόδειξη του Θεωρήματος της §3.14
- Οι γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου στη σελ. 70

ΣΧΟΛΙΟ: Οι προτεινόμενες δραστηριότητες στις σελίδες 41 και 47 του βιβλίου του μαθητή αποτελούν εναλλακτικές διατυπώσεις των θεωρημάτων της §4.5 της σελίδας 80.

Cabri II, Συμμετρία ως προς σημείο και ως προς άξονα σελ. 15 (αφορά §3.9 σχολ. βιβλίου) Κριτήρια ισότητας τριγώνου σελ.19 (αφορά §3.4 σχολ. βιβλίου)

The Geometer´s Sketchpad, Ισότητα τριγώνων (Π-Γ-Π), σελ. 75-76 (αφορά §3.2 σχολ. βιβλίου) Ισότητα τριγώνων(Γ-Π-Γ), σελ. 74 (αφορά §3.3 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Δε θα διδαχθούν:

- Η απόδειξη της πρότασης IV της §4.2
- Οι αποδείξεις του Θεωρήματος και του πορίσματος της §4.7
- Οι γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου.

Cabri II, Δραστηριότητα 1α σελ. 23 (αφορά §4.7 σχολ. βιβλίου) Δραστηριότητα 1β σελ. 25 (αφορά §4.4 σχολ. βιβλίου)

The Geometer´s Sketchpad, Μεσοκάθετοι τριγώνου, σελ. 54-55 (αφορά §4.5 σχολ. βιβλίου)
Διχοτόμοι τριγώνου, σελ. 59-60 (αφορά §4.5 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: (Προτείνεται να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες)

Δε θα διδαχθούν:

- Η απόδειξη του Θεωρήματος της § 5.7
- Η απόδειξη του Θεωρήματος της § 5.8
- Οι γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου.

Cabri **II,** Δραστηριότητα 1α και 1β σελ. 29-32 (αφορά §5.5 σχολ. βιβλίου)

The Geometer´s Sketchpad, Ιδιότητες ορθογωνίων παραλληλογράμμων, σελ.61-62 (αφορά §5.3 σχολ. βιβλίου)
Τετράπλευρο με κορυφές τα μέσα των πλευρών άλλου τετραπλεύρου, σελ. 15 (αφορά §5.3 σχολ. βιβλίου)
Ιδιότητες ρόμβων, σελ.63-64 (αφορά §5.4 σχολ. βιβλίου)
Διάμεσοι τριγώνου, σελ. 52-53 (αφορά §5.7 σχολ. βιβλίου)
Ύψη τριγώνου, σελ. 56-58 (αφορά §5.8 σχολ. βιβλίου)
Μεσοκάθετοι τριγώνου, σελ. 54-55 (αφορά §5.12 σχολ. βιβλίου)
Διχοτόμοι τριγώνου, σελ. 59-60 (αφορά §5.12 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

- Στην απόδειξη του Θεωρήματος της §6.2 να διδαχθεί μόνο η περίπτωση (i).

Δε θα διδαχθούν:

- Η απόδειξη του Θεωρήματος της §6.3
- Η εφαρμογή 2 της §6.3
- Η §6.4
- Η απόδειξη του Θεωρήματος της §6.6
- Η εφαρμογή 3 της §6.6
- Τα προβλήματα 1,2,4, της §6.7
- Οι γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου

Cabri **II,** Εγγράψιμα τετράπλευρα, σελ. 35-40 (αφορά επαναλ. Κεφ.6 σχολ. βιβλίου)
Δραστηριότητα 1, 2 και 3, σελ. 37-40 (αφορά επαναλ. Κεφ.6 σχολ. βιβλίου)

The Geometer´s Sketchpad, Γεωμ. Τόπος μέσων παραλλήλων χορδών, σελ. 43-44 και 46-47 (αφορά §6.4-6.7 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: (Προτείνεται να διατεθούν 5-6 διδακτικές ώρες)

Η διδασκαλία των § 7.1 έως και 7.6 να γίνει περιληπτικά μέσα από τις ερωτήσεις κατανόησης και εμπέδωσης και να μην απαιτείται η απομνημόνευση των τύπων των σελίδων 149 και 150.

Δε θα διδαχθούν:

- Η απόδειξη του Θεωρήματος του Θαλή §7.7 και η απόδειξη του Θεωρήματος της σελίδας 153.
- Η §7.9
- Οι γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου

💻 Cabri **II,** Δραστηριότητα 1α και 1β, σελ. 43-44 (αφορά §7.7 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Δε θα διδαχθούν:

- Οι αποδείξεις των θεωρημάτων Ι, ΙΙ και ΙΙΙ της §8.2
- Οι εφαρμογές 1 και 3 της §8.2
- Οι γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου

💻 Cabri **II,** Δραστηριότητα 1, σελ. 45 (αφορά επαναλ. Κεφ. 8 σχολ. βιβλίου)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Να μη διδαχθούν οι ασκήσεις από σύνθετα θέματα:
σελ. 48 οι ασκήσεις 1, 2
σελ. 58 οι ασκήσεις 2, 3, 4
σελ. 83 οι ασκήσεις 1, 3, 4
σελ. 88 οι ασκήσεις 3, 4, 5, 6
σελ. 100 οι ασκήσεις 1, 4, 5
σελ. 104 οι ασκήσεις 1, 2
σελ. 111 οι ασκήσεις 2, 4, 6, 7, 8
σελ. 115 οι ασκήσεις 3, 4, 5
σελ. 130 οι ασκήσεις 2, 3
σελ. 134 οι ασκήσεις 1, 2, 3, 4
σελ. 140 οι ασκήσεις 1, 2, 3
σελ. 157 οι ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5
σελ. 163 οι ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5
σελ. 178 οι ασκήσεις 1, 2, 3

ΤΑΞΗ Β΄ ΕΠΑ.Λ.

ΑΛΓΕΒΡΑ: Ώρες 2 εβδομαδιαίως

.

Το αργότερο μέχρι **10 Οκτωβρίου** θα πρέπει να έχει ολοκληρωθεί η διδασκαλία της ύλης της Άλγεβρας Α' ΕΠΑ.Λ. Στη συνέχεια, θα διδαχτεί η προβλεπόμενη από το Πρόγραμμα Σπουδών ύλη της Άλγεβρας Β' ΕΠΑ.Λ. Ως διδακτικό εγχειρίδιο θα χρησιμοποιηθεί το σχολικό βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου» των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου και Α. Σβέρκου.

Για την πληρέστερη ενημέρωση των διδασκόντων δίνονται ειδικότερες οδηγίες για κάθε Κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 1. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 17 διδακτικές ώρες.

Στο Κεφάλαιο αυτό συμπληρώνεται η ύλη της τριγωνομετρίας που προβλέπεται από το Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών του Λυκείου.

Το περιεχόμενο του Κεφαλαίου αυτού μπορεί να χωριστεί σε 4 ευρύτερες ενότητες. Η πρώτη ενότητα περιλαμβάνει την έννοια της περιοδικής συνάρτησης, τις γραφικές παραστάσεις περιοδικών συναρτήσεων καθώς και την επίλυση βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων. Η δεύτερη ενότητα περιλαμβάνει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αθροίσματος και διαφοράς δύο γωνιών και πολλαπλασίων μιας γωνίας, η τρίτη τους μετασχηματισμούς τριγωνομετρικών παραστάσεων και η τέταρτη την επίλυση τριγώνου.

Το τυπολόγιο της δεύτερης και τρίτης ενότητας είναι διαρθρωμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να φαίνεται η εξάρτησή του από το βασικό τύπο $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$. Έτσι, κατά τη διδασκαλία του Κεφαλαίου αυτού δίνεται ευκαιρία στους μαθητές για δημιουργική εργασία.

Η ανάπτυξη του Κεφαλαίου είναι λιτή και απαλλαγμένη από ενότητες που δεν έχουν σήμερα πρακτική σκοπιμότητα, όπως για παράδειγμα η επίλυση τριγώνου από δευτερεύοντα στοιχεία του.

Ειδικότερα οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι:

§**1.1:** Οι μαθητές πρέπει:

i) Να γνωρίζουν την έννοια της περιοδικής συνάρτησης.
ii) Να μπορούν να σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

$y=\eta\mu x \quad , y=\sigma\upsilon\nu x,\ y=\alpha\eta\mu(\nu x),\ y=\alpha\sigma\upsilon\nu(\nu x)$

καθώς και της συνάρτησης $y=\varepsilon\phi x$ Η μελέτη των συναρτήσεων αυτών κρίνεται απαραίτητη, αφού εκφράζουν πλήθος φαινομένων κυρίως της Φυσικής.

The Geometer´s Sketchpad, Σχεδίαση ημιτονοειδούς καμπύλης, σελ. 28-30

Function probe, Μελέτη των συναρτήσεων y=ημx και y=συνx και των μετασχηματισμών τους, σελ. 62-65 Μελέτη των συναρτήσεων y=εφx και y=σφx και των μετασχηματισμών τους σελ. 67-69

§**1.2:** Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν τις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις: $\eta\mu x=\alpha$, $\sigma\upsilon\nu x=\alpha$ και $\varepsilon\phi x=\alpha$ καθώς και άλλες τριγωνομετρικές εξισώσεις που η επίλυσή τους ανάγεται στις βασικές. Θεωρείται σκόπιμο η επίλυση των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων να εξηγείται με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των αντίστοιχων συναρτήσεων, αφού μ' αυτό τον τρόπο γίνεται καλύτερα κατανοητή η πολλαπλότητα των λύσεων και η παραγωγή των τύπων των λύσεων αυτών των εξισώσεων. Ακόμη προτείνεται οι ασκήσεις 1 (Β' Ομάδας της § 1.1) και 13 (Α' ομάδας της §1.2) να λυθούν στην τάξη.

§**1.3 και** §**1.4:** Οι μαθητές πρέπει:

i) Να γνωρίζουν τον τύπο του συνημιτόνου της διαφοράς δύο γωνιών (χωρίς την απόδειξή του).
ii) Να παράγουν από τον τύπο αυτό τους υπόλοιπους τύπους των τριγωνομετρικών αριθμών του αθροίσματος και της διαφοράς γωνιών καθώς και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α.
iii) Με τη βοήθεια των προηγούμενων τύπων:

α) Να υπολογίζουν την τιμή ορισμένων παραστάσεων τριγωνομετρικών αριθμών.
β) Να αποδεικνύουν απλές τριγωνομετρικές ταυτότητες.
γ) Να επιλύουν απλές τριγωνομετρικές εξισώσεις.

§**1.5:** Η παράγραφος αυτή **δε θα διδαχθεί.**
§**1.6:** Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:
α) Να μελετούν τη συνάρτηση f(χ)=ρημ(χ+φ).
β) Να μετασχηματίζουν τη συνάρτηση f(χ)=ρημχ+βσυνχ στη μορφή f(χ)=ρημ(χ+φ).
γ) Να επιλύουν απλές τριγωνομετρικές εξισώσεις με τη βοήθεια των προηγούμενων μετασχηματισμών.
§**1.7:** Η παράγραφος αυτή **δε θα διδαχθεί.**

Κεφάλαιο 2. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 12 διδακτικές ώρες.

Στο Κεφάλαιο αυτό επαναλαμβάνονται και συμπληρώνονται όσα έχουν διδαχθεί μέχρι τώρα οι μαθητές σχετικά με τα πολυώνυμα και τις πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις.

Για να επιτευχθεί ο στόχος της ολοκλήρωσης της ύλης **δεν είναι σκόπιμη** η επέκταση σε δύσκολες ασκήσεις θεωρίας πολυωνύμων και σε μορφές εξισώσεων που άλλοτε αποτελούσαν ενότητες της διδακτέας ύλης των Μαθηματικών (π.χ. αντίστροφες εξισώσεις διτετράγωνες, με ριζικά) και οι οποίες σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις δεν αποτελούν πια κύρια ύλη του μαθήματος.

Ειδικότερα, οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι:

§**2. 1:** Οι μαθητές πρέπει:

i) Να μπορούν να αναγνωρίζουν πότε μια αλγεβρική παράσταση της πραγματικής μεταβλητής x, είναι πολυώνυμο και να διακρίνουν τα στοιχεία του: **όροι, συντελεστές, σταθερός όρος** και **βαθμός.**
ii) Να καταλάβουν τις έννοιες: σταθερό πολυώνυμο - μηδενικό πολυώνυμο - ίσα πολυώνυμα - αριθμητική τιμή πολυωνύμου - ρίζα πολυωνύμου.
iii) Να μπορούν να αντιδιαστέλλουν τις έννοιες:

α) Μηδενικό πολυώνυμο -Τιμή πολυωνύμου ίση με το μηδέν β) Ίσα πολυώνυμα -Πολυώνυμα ίσα για ορισμένες τιμές της μεταβλητής

iv) Να μπορούν να προσθέτουν, να αφαιρούν και να πολλαπλασιάζουν πολυώνυμα.

§**2.2:** Οι μαθητές πρέπει:

i) Να κατανοήσουν την αλγοριθμική διαίρεση πολυωνύμων με πρότυπο την αλγοριθμική διαίρεση μεταξύ θετικών ακεραίων.
ii) Να μπορούν να κάνουν τη διαίρεση πολυωνύμων και να γράφουν την ταυτότητα της διαίρεσης.
iii) Να κατανοήσουν γιατί κάθε πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-\rho$ παίρνει τη μορφή: $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$ και να μπορούν με βάση την ταυτότητα αυτή:

α) Να υπολογίζουν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$.
β) να αποδεικνύουν ότι: $P(\rho)=0 \Leftrightarrow P(x)=(x-\rho)\pi(x)$.
Να μπορούν να κάνουν χρήση του σχήματος Horner για τον υπολογισμό των τιμών μιας πολυωνυμικής συνάρτησης (μέθοδος προσαρμόσιμη σε υπολογιστή) καθώς και του πηλίκου και του υπολοίπου της διαίρεσης πολυωνύμου με πρωτοβάθμιο παράγοντα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Από την §2.2 **να μη διδαχθούν** οι ασκήσεις 1,2,4 και 5 της Β΄ ομάδας της σελίδας 73.

§**2.3:** Οι μαθητές πρέπει:

i) Να εμπεδώσουν τον τρόπο επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού $\nu \geq 2$ με παραγοντοποίηση, που ήδη έχουν διδαχθεί.
ii) Να κατανοήσουν το Θεώρημα των ακέραιων ριζών και τη σχετική απόδειξη.
iii) Να εφαρμόζουν το προηγούμενο Θεώρημα στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων (ανισώσεων) με ακεραίους συντελεστές.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Η υποπαράγραφος «Προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση» **δε θα διδαχθεί**.

§**2.4:** Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις, των οποίων η επίλυση ανάγεται στη επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων γνωστής μορφής.

Κεφάλαιο 3. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 10 διδακτικές ώρες.

Στο Κεφάλαιο αυτό εισάγεται με παραδείγματα η έννοια της ακολουθίας ως συνάρτησης με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακεραίων και εξετάζονται κυρίως δύο ειδικές μορφές ακολουθιών, που ορίζονται αναδρομικά, η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος.

Δε δίνεται ο αυστηρός «εψιλοντικός» ορισμός του ορίου μιας ακολουθίας αλλά επιχειρείται μια πρώτη προσέγγιση στην έννοια του ορίου κατά την αναζήτηση του αθροίσματος των άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο απολύτως μικρότερο της μονάδας.

Ειδικότερα, οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι:

§**3. 1:** Οι μαθητές πρέπει:

i) Να κατανοήσουν την έννοια της ακολουθίας και τη σχετική με αυτή ορολογία.
ii) Να μπορούν να βρίσκουν τους όρους ακολουθίας από το γενικό της όρο ή από τον αναδρομικό της τύπο και να τους παριστάνουν γραφικά.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την §3.1 **να μη διδαχθούν** οι ασκήσεις της Β' ομάδας της σελίδας 93.

§**3.2 και** §**3.3:** Οι μαθητές πρέπει:

i) Να μπορούν να διακρίνουν αν μια ακολουθία είναι αριθμητική ή γεωμετρική πρόοδος με τον υπολογισμό της διαφοράς $\alpha_{\nu+1}-\alpha_{\nu}$ και του λόγου $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu}}$ αντιστοίχως.
ii) Να μπορούν να βρίσκουν το νιοστό όρο μιας προόδου όταν δίνονται επαρκή στοιχεία και να επιλύουν σχετικές ασκήσεις.
iii) Να κατανοήσουν τις έννοιες αριθμητικός μέσος - γεωμετρικός μέσος και να επιλύουν, σχετικές με αυτά, απλές ασκήσεις.
iv) Να μπορούν να αποδείξουν τους τύπους που δίνουν το άθροισμα ν διαδοχικών όρων, μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου και να επιλύουν προβλήματα και ασκήσεις με την βοήθεια αυτών των τύπων.

§**3.4:** Η παράγραφος αυτή **δε θα διδαχθεί.**

§**3.5:** Οι μαθητές πρέπει:

i) Να κατανοήσουν τις έννοιες:

α) Άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου
β) Όριο του S_ν, όταν το ν τείνει στο $+\infty$

ii) Να κατανοήσουν τη διαδικασία με την οποία προκύπτει ο τύπος $S=\frac{a_1}{1-\lambda},\ |\lambda|<1$ και να τον εφαρμόζουν σε προβλήματα και ασκήσεις.
iii) Να προσεγγίσουν την έννοια του ορίου μέσα από προβλήματα και παραδείγματα που θα παρουσιάσει ο διδάσκων στην τάξη.

Κεφάλαιο 4. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 12 διδακτικές ώρες.

Στην αρχή του Κεφαλαίου συμπληρώνεται ο ορισμός της δύναμης πραγματικού αριθμού με την εισαγωγή της έννοιας της δύναμης με εκθέτη ρητό και άρρητο αριθμό.

Στη συνέχεια ορίζεται η εκθετική συνάρτηση με βάση το $\alpha > 0$, διατυπώνονται οι βασικές της ιδιότητες και τονίζεται η σημασία της εκθετικής συνάρτησης $y = e^x$ ως μοντέλου για την περιγραφή φαινομένων σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους. Για παράδειγμα, στη Φυσική η εκθετική συνάρτηση περιγράφει διαδικασίες διάσπασης και απόσβεσης, στην Οικονομία και Βιολογία αυξητικές διαδικασίες κτλ.

Τέλος ορίζεται η έννοια του λογάριθμου και της λογαριθμικής συνάρτησης.

Οι λογάριθμοι έχουν χάσει βέβαια την εξέχουσα θέση που είχαν άλλοτε στους υπολογισμούς. Παραμένει όμως τεράστια η σημασία των δεκαδικών και νεπέριων λογαρίθμων για εφαρμογές στις διάφορες επιστήμες όπως είναι η Φυσική, η Χημεία, η Σεισμολογία, η Αστρονομία κτλ. Επιβάλλεται λοιπόν και εδώ, όπως και στην εκθετική συνάρτηση, η διδασκαλία να έχει σαφή προσανατολισμό προς τις εφαρμογές. Αν οι μαθητές δε διαθέτουν «επιστημονικό υπολογιστή τσέπης» να δίνονται οι τιμές των λογαρίθμων που ενδεχομένως θα χρειαστούν στις διάφορες εφαρμογές.

Ειδικότερα, οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι:

§**4.1:** Οι μαθητές πρέπει:

- **i)** Να κατανοήσουν τη διαδικασία με την οποία ορίζονται δυνάμεις με άρρητο εκθέτη και να μπορούν να υπολογίζουν τέτοιες δυνάμεις με την βοήθεια υπολογιστή τσέπης.
- **ii)** Να γνωρίζουν την εκθετική συνάρτηση και τις βασικές της ιδιότητες και να μπορούν να τη σχεδιάζουν .
- **iii)** Να μπορούν να επιλύουν απλές εκθετικές εξισώσεις-ανισώσεις και απλά εκθετικά συστήματα.
- **iv)** Να μπορούν να περιγράφουν τη διαδικασία ορισμού του αριθμού e και να εξοικειωθούν στην επίλυση προβλημάτων εκθετικής μεταβολής.

§**4.2:** Οι μαθητές πρέπει:

- **i)** Να καταλάβουν ότι ο $\log_a\theta,\ \theta > 0,$ είναι η λύση της εξίσωσης $\alpha^x = \theta$, δηλαδή ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$$

και ειδικότερα ότι:

$$10^x = \theta \Leftrightarrow x = \log\theta \quad \text{και} \quad e^x = \theta \Leftrightarrow x = \ln\theta$$

- **ii)** Να γνωρίζουν ότι:

$$10^{\log\theta} = \theta,\ \log 10^x = x,\quad e^{\ln\theta} = \theta,\ \ln e^x = x, \text{ και } a^x = e^{x\ln a}$$

- **iii)** Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων, να μπορούν να τις αποδεικνύουν και να τις εφαρμόζουν.
- **iv)** Να γνωρίζουν ότι ο υπολογισμός του λογάριθμου ενός αριθμού θ, ως προς οποιαδήποτε βάση α, ανάγεται στον υπολογισμό του δεκαδικού ή του νεπέριου λογάριθμου του αριθμού αυτού σύμφωνα με τους τύπους

$$\log_\alpha \theta = \frac{\log\theta}{\log\alpha} \qquad \text{και} \qquad \log_\alpha \theta = \frac{\ln\theta}{\ln a}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την §4.2 **να μη διδαχθούν:**

- Η απόδειξη του τύπου αλλαγής βάσης λογαρίθμων και
- Οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογάριθμους **με βάση διαφορετική του 10 και του e.**

§**4.3.** Οι μαθητές πρέπει:

i) Να γνωρίζουν ότι η λογαριθμική συνάρτηση με βάση 10 είναι η συνάρτηση με την οποία κάθε θετικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στον δεκαδικό του λογάριθμο, ενώ η λογαριθμική συνάρτηση με βάση e είναι η συνάρτηση με την οποία κάθε θετικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο φυσικό του λογάριθμο.

ii) Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των λογαριθμικών συναρτήσεων με βάσεις 10 και e και να μπορούν να τις σχεδιάζουν.

iii) Να μπορούν να επιλύουν απλές λογαριθμικές εξισώσεις και λογαριθμικά συστήματα με βάσεις 10 και e.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η διδασκαλία της §4.3 **να περιοριστεί** στις λογαριθμικές συναρτήσεις με **βάσεις 10 και e.**

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ: Ώρες 1 εβδομαδιαίως

Κατά το σχολικό έτος 2009-2010 θα διδαχθεί το βιβλίο Ευκλείδεια Γεωμετρία των Αργυροπούλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάτη Σ. και Σίδερη Π. Το βιβλίο αυτό συνοδεύεται και από βιβλίο του καθηγητή, στο οποίο υπάρχουν αναλυτικές οδηγίες για την διδασκαλία. Από το βιβλίο θα διδαχθούν στη Β΄ τάξη του ΕΠΑ.Λ. τα Κεφάλαια 9 - 11.

Πριν τη διδασκαλία των κεφαλαίων 9 - 11 και το αργότερο **μέχρι 15 Οκτωβρίου**, θα πρέπει να έχει ολοκληρωθεί η διδασκαλία των εννοιών που είναι απαραίτητες για τη διδασκαλία της διδακτέας ύλης της Β΄ ΕΠΑ.Λ.

Στη συνέχεια, προτείνεται μια ενδεικτική κατανομή των ωρών διδασκαλίας ανά Κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: (**Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες**). **Δε θα διδαχθούν** η §9.6 και οι αποδείξεις του Θεωρήματος ΙΙ της §9.4, της εφαρμογής 2 της §9.4.

Cabri II, Το Πυθαγόρειο Θεώρημα, σελ. 49 (αφορά τη §9.2 σχολ. βιβλίου) Γενίκευση Πυθαγόρειου Θεωρήματος, σελ. 49 (αφορά τη §9.4 σχολ. βιβλίου) Δύναμη σημείου ως προς κύκλο, σελ. 57 (αφορά τη §9.7 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: (**Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες**). **Δε θα διδαχθεί** η §10.6 και η απόδειξη του τύπου 3 της §10.4.

Cabri II, Εμβαδόν ορθογωνίου σελ. 63 (αφορά τη §10.3 σχολ. βιβλίου) Εμβαδόν τριγώνου, σελ. 69 (αφορά τη §10.3 σχολ. βιβλίου) Εμβαδόν τραπεζίου, σελ.73 (αφορά τη §10.3 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11:(**Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες**). **Δε θα διδαχθεί** η απόδειξη των Θεωρημάτων της §11.2 και οι εφαρμογές ΙΙ και ΙΙΙ της §11.3.

Cabri II, Κανονικά πολύγωνα-Ομοιότητα σελ. 79 (αφορά τη §11.1 σχολ. βιβλίου) Κανονικά πολύγωνα, σελ. 75 (αφορά τη §11.1-11.3 σχολ. βιβλίου) Μήκος τόξου και κύκλου, σελ. 81 (αφορά τη §11.5 σχολ. βιβλίου) Εμβαδόν τόξου και κύκλου, σελ. 83 (αφορά τη §11.7 σχολ. βιβλίου)

Να μη διδαχθούν:

1. Τα σύνθετα θέματα
2. Οι γενικές ασκήσεις
3. Από τις «Αποδεικτικές ασκήσεις» οι ακόλουθες ανά κεφάλαιο:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: σελ. 186, ασκήσεις 2, 4
σελ. 194, ασκήσεις 3, 6
σελ. 198 -199, ασκήσεις 2, 6
σελ. 204, ασκήσεις 4, 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: σελ. 217 - 218, ασκήσεις 3, 6, 7
σελ. 221, ασκήσεις 2, 3, 4
σελ. 224 - 225, ασκήσεις 1, 2, 4, 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11: σελ. 237, ασκήσεις 2, 3, 4
Σελ. 242, άσκηση 4
Σελ. 251, άσκηση 5

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
Ώρες 2 εβδομαδιαίως

Κατά το σχολικό έτος 2009-2010 θα διδαχθεί στη Β΄τάξη του ΕΠΑ.Λ. το βιβλίο «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης» Β' τάξης Γενικού Λυκείου, των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α.

Για την πληρέστερη ενημέρωση των διδασκόντων δίνονται ειδικότερες οδηγίες για κάθε Κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 1. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 20 διδακτικές ώρες.

Γενικά:

Τα διανύσματα έχουν ιδιαίτερη σημασία όχι μόνο για τα Μαθηματικά, αλλά και για πολλές άλλες επιστήμες, αφού προσφέρουν τη δυνατότητα μαθηματικοποίησης μεγεθών τα οποία δεν ορίζονται μόνο με την αριθμητική τιμή τους. Εξάλλου, η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών οδηγεί στην «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας, δηλαδή στη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων με αλγεβρικές μεθόδους.

Με τη διδασκαλία του Κεφαλαίου αυτού **επιδιώκεται:**

- Να εξοικειωθούν οι μαθητές με το λογισμό των διανυσμάτων, ώστε να ανταποκρίνονται επιτυχώς στις απαιτήσεις άλλων κλάδων που χρησιμοποιούν διανύσματα (Κινηματική, Ηλεκτρισμός κτλ.)
- Να προσεγγίζουν οι μαθητές γεωμετρικά θέματα μέσω των διανυσμάτων, μια προσέγγιση που σε πολλές περιπτώσεις διευκολύνει τη μελέτη και την εξαγωγή των συμπερασμάτων.
- Να μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιούν τα διανύσματα στη μελέτη θεμάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας και των μιγαδικών αριθμών.

Τέλος, πρέπει να τονιστεί ότι, όπως έχει αποδείξει η διδακτική πράξη, το Κεφάλαιο των διανυσμάτων είναι μια ενότητα το περιεχόμενο της οποίας δύσκολα αφομοιώνουν οι μαθητές. Γι' αυτό απαιτείται εποπτική παρουσίαση των εννοιών και προσπάθεια ενεργού συμμετοχής των μαθητών.

Ειδικότερα:

§ 1.1 Η Έννοια του διανύσματος

Το διάνυσμα εισάγεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα, και δεν γίνεται καμιά αναφορά στα ελεύθερα ή στα εφαρμοστά διανύσματα. Όμως, με την εισαγωγή της έννοιας της ισότητας των διανυσμάτων, κάθε διάνυσμα παραμένει «αναλλοίωτο» αν μετακινηθεί παράλληλα προς την αρχική του θέση. Έτσι, κάθε διάνυσμα του χώρου είναι ίσο με ένα μοναδικό διάνυσμα που έχει αρχή ένα σταθερό σημείο Ο (σημείο αναφοράς).

Ως γωνία δύο διανυσμάτων $\vec{\mathrm{OA}}=\vec{\alpha}$ και $\vec{\mathrm{OB}}=\vec{\beta}$ ορίζεται η κυρτή γωνία $\mathrm{A\hat{O}B}$.

Επομένως, αν $\theta=\mathrm{A\hat{O}B}$, τότε $0\le\theta\le\pi$. Η επιλογή αυτή διευκολύνει το διανυσματικό λογισμό και δεν επιβαρύνει τους μαθητές με νέο συμβολισμό.

§ 1.2 Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

§ 1.3. Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Οι πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό, καθώς και οι βασικές τους ιδιότητες, παρουσιάζονται με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας και τονίζεται ιδιαίτερα ότι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ μπορεί να γραφτεί ως διαφορά $\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ όπου O είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Στην τριγωνική ανισότητα:

$$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

να τονιστεί ότι η αριστερή ισότητα ισχύει όταν τα διανύσματα είναι **αντίρροπα**, ενώ η δεξιά ισότητα όταν τα διανύσματα είναι **ομόρροπα**. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη παραλληλίας δυο διανυσμάτων:

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \qquad \text{(όταν } \vec{\beta} \neq \vec{0}\text{)}$$

χρησιμοποιείται για την απόδειξη της συγγραμμικότητας τριών σημείων (π.χ. άσκηση 6, Α΄ ομάδας, §1.3).Τέλος, δεν γίνεται αναφορά στον απλό λόγο στον οποίο διαιρείται ένα διάνυσμα από ένα σημείο. Ο απλός λόγος δεν περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη, αλλά είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης στην άσκηση 4, Β' ομάδας, §1.3.

Δεν θα διδαχθούν:

- Η άσκηση 4 της Β' ομάδας της §1.3
- Οι εφαρμογές 1 και 2 της §1.3 και οι αντίστοιχες ασκήσεις
- Η απόδειξη του Θεωρήματος της §1.3 (σελ. 24)

§ 1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο

Με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος ένα διάνυσμα συμβολίζεται ως ένα διατεταγμένο ζεύγος με στοιχεία τις συντεταγμένες του, και έτσι διευκολύνεται ο λογισμός των διανυσμάτων.

Δεν θα διδαχθούν:

- Η εφαρμογή 2 της σελίδας 35 και οι αντίστοιχες ασκήσεις
- Η απόδειξη της ικανής και αναγκαίας συνθήκης παραλληλίας δυο διανυσμάτων

$\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$

§ 1.5 Εσωτερικό Γινόμενο διανυσμάτων

Τέλος, ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων και αποδεικνύονται οι βασικές του ιδιότητες. Το εσωτερικό γινόμενο αποτελεί τη σημαντικότερη ενότητα του Κεφαλαίου των διανυσμάτων και αυτό φαίνεται από την ποικιλία των εφαρμογών του. Οι διάφορες εκφράσεις του εσωτερικού γινομένου, επιτρέπουν τον υπολογισμό του μέτρου ενός διανύσματος και της γωνίας δυο διανυσμάτων, καθώς και την ευκολότερη απόδειξη πολλών προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Κεφάλαιο 2. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 10 διδακτικές ώρες.

Γενικά:

Ένα μεγάλο μέρος του Κεφαλαίου αυτού το έχουν διδαχτεί οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις, αλλά εδώ τα θέματα που σχετίζονται με την ευθεία παρουσιάζονται συστηματικότερα και με μεγαλύτερη πληρότητα και ακρίβεια Ειδικότερα:

Με τη διδασκαλία του Κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να γνωρίσουν την εξίσωση της ευθείας και να μελετήσουν με αλγεβρικές μεθόδους τις ιδιότητες της στο επίπεδο.

- Να εξοικειωθούν με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

- Να κατανοήσουν τις δυνατότητες και τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας για την αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων.

Ειδικότερα:

§ 2.1 Εξίσωση ευθείας

Τονίζεται η σημασία του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας, με τη βοήθεια του οποίου διατυπώνονται οι συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δυο ευθειών, και προσδιορίζονται οι διάφορες μορφές της εξίσωσης ευθείας.

Το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ αποτελείται από την κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$ και τις μη κατακόρυφες ευθείες $y - y_0 = \lambda(x - x_0), \lambda \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δυο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$, δίνεται μόνο με τον τύπο: $y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_0)$, ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από ένα σημείο και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης. Δεν αναφέρεται ο αντίστοιχος τύπος με την ορίζουσα 3x3, αφού οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί τις ορίζουσες και τις ιδιότητες τους. Το πρόβλημα της συγγραμμικότητας τριών σημείων αντιμετωπίζεται διανυσματικά ή εξετάζεται αν η εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα δυο σημεία διέρχεται και από το τρίτο σημείο.

§ 2.2 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

Δεν περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη η σχέση της γωνίας δυο ευθειών και των συντελεστών διεύθυνσής τους. Ο προσδιορισμός της γωνίας δυο ευθειών γίνεται με τον προσδιορισμό της γωνίας αντίστοιχων παράλληλων διανυσμάτων (Εφαρμογή 3, σελίδα 69).

§ 2.3 Εμβαδόν τριγώνου.

Για το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ του οποίου δίνονται οι κορυφές $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$, δεν χρησιμοποιείται ο τύπος της ορίζουσας 3x3, αλλά ο τύπος:

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{A\Gamma}})\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\|$$

Δεν θα διδαχθούν:

Οι αποδείξεις των τύπων της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου.

Κεφάλαιο 3. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 24 διδακτικές ώρες.

Γενικά:

Οι κωνικές τομές είχαν μελετηθεί από τους αρχαίους Έλληνες, οι οποίοι είχαν ανακαλύψει τις γεωμετρικές τους ιδιότητες, πολύ πριν από την εισαγωγή των μεθόδων της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Σήμερα το ενδιαφέρον για τη μελέτη των κωνικών τομών είναι αυξημένο, λόγω του μεγάλου αριθμού των θεωρητικών και πρακτικών εφαρμογών τους (τροχιές πλανητών, κομητών, βλημάτων, ηλεκτρονίων κτλ.).

Με τη διδασκαλία του Κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται:

- Να διευρύνουν οι μαθητές το πεδίο των γεωμετρικών τους γνώσεων και με άλλη κατηγορία γραμμών εκτός της ευθείας και του κύκλου.
- Να γνωρίσουν οι μαθητές τις βασικές ιδιότητες των κωνικών τομών. Να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με την ποικιλία των εφαρμογών των κωνικών τομών.

Ειδικότερα:

§ 3.1 Ο Κύκλος

Προσδιορίζεται η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων. Με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου υπολογίζονται οι συντεταγμένες του κέντρου και η ακτίνα του κύκλου που παριστάνει η εξίσωση $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου σε ένα σημείο του προσδιορίζεται από την ιδιότητά της να είναι κάθετη στην ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής.

Δεν θα διδαχθούν:

- Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου και οι αντίστοιχες εφαρμογές και ασκήσεις.

§ 3.2 Η Παραβολή

Δίνεται ο ορισμός της παραβολής και βρίσκεται η εξίσωσή της με άξονα των τετμημένων τον άξονα συμμετρίας της και άξονα των τεταγμένων τη μεσοκάθετη της απόστασης της εστίας της από τη διευθετούσα. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής σε ένα σημείο της M_1, ορίζεται ως η εξίσωση της ευθείας που αποτελεί την οριακή θέση μιας τέμνουσας M_1M_2 της παραβολής, καθώς το M_2 κινούμενο επί της παραβολής τείνει να συμπέσει με το M_1 (αργότερα στη Γ' τάξη η αναλυτική εξίσωση της εφαπτομένης των κωνικών τομών θα προσδιοριστεί και με τις μεθόδους της Ανάλυσης).

Αποδεικνύεται τέλος η ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής η οποία έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Δεν θα διδαχθούν:

- Η απόδειξη της εξίσωσης της παραβολής

- Η απόδειξη της εξίσωσης της εφαπτόμενης της παραβολής
- Η απόδειξη της ανακλαστικής ιδιότητας της παραβολής
- Η εφαρμογή 1 της σελίδας 96

§ 3.3 Η Έλλειψη

Από την παράγραφο αυτή **δεν θα διδαχθούν:**

- Η απόδειξη της εξίσωσης της Έλλειψης
- Οι παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης και οι αντίστοιχες εφαρμογές και ασκήσεις
- Η εφαρμογή της σελίδας 107 και η εφαρμογή 2 της σελίδας 110

Να τονισθεί ιδιαίτερα η έννοια της εκκεντρότητας και η σημασία της για τη μορφή της έλλειψης, καθώς και οι εφαρμογές της ανακλαστικής ιδιότητας της έλλειψης στις ακουστικές στοές και στη λιθοθρυψία.

§ 3.4 Η Υπερβολή

Από την παράγραφο αυτή **δεν θα διδαχθούν:**

- Η απόδειξη της εξίσωσης της υπερβολής
- Η απόδειξη των εξισώσεων των ασυμπτώτων της υπερβολής

§ 3.5 Η εξίσωση $Ax^2+B\psi^2+\Gamma x+\Delta\psi+E=0$

Η παράγραφος αυτή να διδαχθεί με τη βοήθεια απλών παραδειγμάτων και με έμφαση στην υποπαράγραφο «Σχετική θέση ευθείας και κωνικής τομής».

Κεφάλαιο 4. Το κεφάλαιο αυτό δεν θα διδαχθεί.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ «ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ»

Κεφάλαιο 1

1. (i) Σ (ii) Λ (iii) Λ (iv) Σ (v) Λ (vi) Σ

2. (i) $\vec{A\Gamma}$, (ii) $\vec{A\Delta}$ (iii) $\vec{A\Delta}$ (iv) $\vec{B\Gamma}$ (v) $\vec{A\Gamma}$ (vi) $\vec{AB}$ (vii) $\vec{\Gamma A}$ (viii) $\vec{0}$ (ix) $\vec{0}$

3. (i) $\vec{\mathrm{A\Gamma}}$, (ii) $\vec{\mathrm{AB}}$, (iii) 2$\vec{\mathrm{AB}}$, (iv) $\vec{\mathrm{B\Gamma}}$, (v) 2$\vec{\mathrm{A\Gamma}}$
4. (ii)
5. (i) (-3,2), (ii) (3,-2) , (iii) (3,2) , (iv) (-2,-3)
6. $\vec{\mathrm{AB}}$ = (3,4) , $\vec{\mathrm{A\Gamma}}$ = (-7,-3) , $\vec{\mathrm{AE}}$ = (-6,4) , $\vec{\mathrm{A\Delta}}$ = (0,-4) , $\vec{\mathrm{BE}}$ = (-9,0)
7. ΑΒ$\rightarrow(-\frac{1}{2},\frac{7}{2})$, ΒΓ$\rightarrow(-\frac{7}{2},\frac{3}{2})$, ΓΔ$\rightarrow(0,-3)$, ΑΓ $\rightarrow(0,0)$
8. (i) 4 , (ii)4
9. (i) 0 , (ii) α^2 , (iii) 0 , (iv) $\frac{\alpha^2}{2}$, (v) α^2 , (vi) -α^2
10. i) 6 , ii) $3\sqrt{3}$, iii) 3 , iv) 0 , v) –3 , vi) -$3\sqrt{3}$, vii) -6
11. Γ
12. 1. Οξεία, 2. Αμβλεία, 3. Οξεία, 4. αμβλεία , 5. ορθή , 6. ορθή
13. (iii)

Κεφάλαιο 2

1. • Ψ • Α • Ψ • Α • Ψ
2. Α$\rightarrow$x=2 Β$\rightarrow$y=3, 3x-2y=o Γ$\rightarrow$2x-5y=-8 Δ$\rightarrow$y=3 Ε$\rightarrow$3x-2y=0 Ζ$\rightarrow$x=2
3 • Γ (3,2) •.$\mathrm{B}\neq 0$ • x+y=8
4 • y=3x+1, y=3x-2 • y=$-\frac{1}{3}$x+8, y=$-\frac{1}{3}$x+10 • y=3x •y=$-\frac{1}{3}$x

5. ε_3
6. Γ

Κεφάλαιο 3

1. Γ **2.** Α **3.** Γ **4.** Γ **5**. Γ **6.**Γ **7.** Α **8.** Γ **9.** Β **10**. Γ
11. Β
12. •$\alpha^2+\beta^2=\rho^2$ • β=0 •α=0 •ρ=β •ρ=α •α=β=ρ
13. • Ζεύγος ευθειών •Κύκλος •.Παραβολή • Υπερβολή
14 • Έλλειψη • Κύκλος •Έλλειψη •Υπερβολή • Ισοσκελής Υπερβολή

Κεφάλαιο 4

1. (i) Α (ii) Ψ (iii) Α
2. (i) Α (ii) Ψ (iii) Ψ (iv) Ψ (v) Ψ
3. (i) Ψ (ii) Α (iii) Α (iv) Ψ
4. (i) Α (ii) Ψ
5. (i) Ψ (ii) Α
6. (i) Ψ (ii) Α
7 .(i) Ψ (ii) Α
8. (i) Ψ (ii) Ψ
9. (i) Ψ (ii) Α (iii) Α
1.Δ 2.Γ 3. Γ 4. Β 5. Β 6. Γ

ΤΑΞΗ Γ΄ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι: Ώρες 5 εβδομαδιαίως

Κατά το σχολικό έτος 2009-2010 ως διδακτικό εγχειρίδιο θα χρησιμοποιηθεί το σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Α΄ Τάξης 2ου Κύκλου Τ.Ε.Ε. (Βλάμος Παν., Δούναβης Αντ., Ζέρβας Δημ.), ΟΕΔΒ 2005

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΠΙΝΑΚΕΣ – ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Το κεφάλαιο αυτό δε θα διδαχθεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ (**Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 22 διδακτικές ώρες**.)
Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να γνωρίζουν τις διαδοχικές φάσεις μίας στατιστικής έρευνας
- Να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες της Περιγραφικής Στατιστικής και να χρησιμοποιούν σωστά τη σχετική ορολογία.
- Να μπορούν να διαβάσουν και να κατασκευάσουν πίνακες κατανομής συχνοτήτων.
- Να μπορούν να διαβάζουν τις διάφορες μορφές των γραφικών παραστάσεων κατανομών συχνοτήτων.
- Να μπορούν να παριστάνουν γραφικά μία κατανομή συχνοτήτων.
- Να γνωρίζουν και να μπορούν να υπολογίζουν:
  - ✓ τις παραμέτρους θέσης μίας κατανομής συχνοτήτων και
  - ✓ τις παραμέτρους διασποράς μιας κατανομής συχνοτήτων.

Μεγάλο μέρος του περιεχομένου της ενότητας της Περιγραφικής Στατιστικής έχει διδαχθεί στο Γυμνάσιο. Εδώ γίνεται συστηματικότερη παράσταση και συμπλήρωση των σχετικών εννοιών.
Για να μην καθυστερεί η διδασκαλία, οι στατιστικοί πίνακες και τα διαγράμματα κρίνεται σκόπιμο να ετοιμάζονται σε φωτοτυπίες ή διαφάνειες πριν από το μάθημα. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, συνιστάται να γίνεται επεξεργασία τους μέσα από το βιβλίο.
Να καταβληθεί προσπάθεια με κατάλληλα παραδείγματα να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες <u>πληθυσμός</u>, <u>μεταβλητή</u> και <u>δείγμα</u>. Είναι σημαντικό να αναγνωρίζουν οι μαθητές τη χρησιμότητα του δείγματος από το οποίο μπορούν να προκύψουν αξιόπιστες πληροφορίες για ολόκληρο τον πληθυσμό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Κατά τη διδασκαλία του $2^{ου}$ κεφαλαίου

- Από την παράγραφο 2.3 δε θα διδαχθεί η κατανομή συχνοτήτων σε κλάσεις άνισου πλάτους στις σελ. 75-76.
- Από την παράγραφο 2.5 δε θα διδαχθεί η μέση απόλυτη απόκλιση στις σελίδες 84 – 86.
- Δε θα διδαχθούν οι Γενικές Ασκήσεις του Κεφαλαίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: **ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ** (**Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 28 διδακτικές ώρες**.)
Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να μπορούν να βρίσκουν το όριο μίας συνάρτησης στο x_o, όταν δίνεται η γραφική της παράσταση.
- Να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθειά του να υπολογίζουν το όριο πολλών συναρτήσεων.
- Να κατανοήσουν την έννοια της συνέχειας συνάρτησης σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της.

Η έννοια του ορίου συνάρτησης στο x_o, εισάγεται είτε εποπτικά με την βοήθεια της γραφικής παράστασης, είτε με παρατήρηση κατάλληλου πίνακα τιμών της συνάρτησης. Τόσο τα σχήματα όσο και οι πίνακες, για οικονομία χρόνου, να δίδονται στους μαθητές είτε με διαφάνειες, είτε με φωτοτυπίες ή ακόμα να γίνονται οι παρατηρήσεις μέσα από ανοικτά βιβλία.
Η διδασκαλία του ορίου **δεν αποτελεί αυτοσκοπό** αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή στις έννοιες της παραγώγου και του

ολοκληρώματος. Δεν θα γίνουν ασκήσεις που αναφέρονται στις περιπτώσεις 2 και 3 του πίνακα συζυγών παραστάσεων της σελίδας 115.
Η έννοια της συνέχειας συνάρτησης εισάγεται εποπτικά και ακολουθεί ο ορισμός με την βοήθεια του ορίου.
Διευκρινίζεται ότι στην αρχή του κεφαλαίου αυτού πρέπει να γίνει μία επανάληψη στην έννοια της συνάρτησης, με επιδίωξη οι μαθητές να μπορούν:

- να βρίσκουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης
- να σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων (αχ, $αχ^2$, α/χ, ημ, συν, εφ, e^x, lnχ)
- από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης να βρίσκουν την τιμή της σ' ένα σημείο x_0, τη μονοτονία της κατά διαστήματα και τα ακρότατα.
- να βρίσκουν το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο απλών συναρτήσεων.

Επειδή οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί την έννοια της σύνθετης συνάρτησης, θα πρέπει ο διδάσκων να αφιερώσει τον αναγκαίο χρόνο για την κατανόηση της έννοιας αυτής πριν τη διδασκαλία του θεωρήματος της συνέχειας σύνθετης συνάρτησης, σελ. 141.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κατά τη διδασκαλία του 3^{ου} κεφαλαίου

- Από την παράγρ. 3.4 θα διδαχθεί **μόνο** η μελέτη απροσδιόριστης μορφής 0/0 για ρητές συναρτήσεις καθώς και για τα ριζικά μόνο η πρώτη περίπτωση του πίνακα συζυγών παραστάσεων της σελ. 115.
- Δε θα διδαχθούν οι παράγραφοι 3.5, 3.10 και 3.11.
- Δε θα διδαχθούν οι εφαρμογές: 1β και 1γ στις σελίδες 118 και 119, 4δ στις σελίδες 122 και 123, 5 στις σελ. 123 και 124, 6 στις σελίδες 124 και 125, 7 στις σελίδες 125 και 126, 2 στις σελίδες 142 και 143, 5 στη σελ.145, και 7 στις σελίδες 147 και 148.

.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: **ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ** (**Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 40 διδακτικές ώρες**.)

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης και να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.
- Να γνωρίζουν του κανόνες παραγώγισης βασικών συναρτήσεων.
- Να μπορούν να προσδιορίζουν τα διαστήματα στα οποία μία συνάρτηση είναι σταθερή, γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.
- Να μπορούν να βρίσκουν τα ακρότατα (αν υπάρχουν) μίας συνάρτησης.

Για την εύρεση του ρυθμού μεταβολής να χρησιμοποιηθούν παραδείγματα από τη μέτρηση στερεών έτσι, ώστε οι μαθητές να επαναλάβουν τους αντίστοιχους τύπους.
Να λυθούν προβλήματα στα οποία να ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας συνάρτησης.
Να γίνουν πολλές εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού τόσο στην Γεωμετρία, όσο και σε άλλες επιστήμες.
Διευκρινίζεται ότι:
α) Στην Παράγραφο **4.4,** η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης αποτελεί μέρος της διδακτέας και εξεταστέας ύλης. Δηλαδή, **δεν εξαιρείται** ο κανόνας της αλυσίδας.
β) Η παράγραφος **4.6** της παράγουσας συνάρτησης να διδαχθεί μαζί με τα ολοκληρώματα (Αν μείνει στη θέση της, θα ξεχαστεί από τους μαθητές, αφενός γιατί ακολουθούν η μονοτονία και τα ακρότατα που είναι ιδιαίτερης βαρύτητας, αφετέρου επειδή δεν υπάρχουν ασκήσεις στο σχολικό βιβλίο που να υποστηρίζουν τη διδασκαλία της.)

β) Στην Παράγραφο **4.9,** το κριτήριο της 2ης παραγώγου αποτελεί μέρος της διδακτέας και εξεταστέας ύλης.
Με τη διδασκαλία του κριτηρίου της 2ης παραγώγου, προσφέρεται στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν εναλλακτικούς τρόπους για την εύρεση των ακρότατων της συνάρτησης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Δε θα διδαχθεί η παράγραφος 4.7.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: **ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ** (**Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 35 διδακτικές ώρες**.)

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια της παράγουσας ή αρχικής συνάρτησης.
- Να κατανοήσουν την έννοια και τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.
- Να υπολογίζουν ολοκληρώματα διαφόρων συναρτήσεων.
- Να μπορούν να υπολογίζουν το ολοκλήρωμα για την επίλυση διάφορων προβλημάτων και για τον υπολογισμό εμβαδών.

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων θα γίνεται με την ανακάλυψη της παράγουσας ή με την παραγοντική ολοκλήρωση.
Να λυθούν προβλήματα στα οποία δίνεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο και ζητείται η συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση των δύο μεγεθών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Κατά τη διδασκαλία του $5^{ου}$ κεφαλαίου
Δε θα διδαχθούν:

- Η απόδειξη του τύπου της παραγοντικής ολοκλήρωσης στη σελ. 242.
- Οι εφαρμογές: 7 και 8 στις σελίδες 238 και 239, 9 και 10 στις σελίδες 246 και 247.
- Οι ασκήσεις 1, 2, 3, 4 στις σελίδες 249 και 250.
- Οι Γενικές Ασκήσεις του Κεφαλαίου.

<u>Γενική Παρατήρηση</u>:

Εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται σε όρια στο άπειρο καθώς και σε παραγράφους ή τμήματα παραγράφων που έχουν εξαιρεθεί **δεν** αποτελούν μέρος της εξεταστέας ύλης.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ: Ώρες 5 εβδομαδιαίως

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ &ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θα διδαχθεί το βιβλίο “ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ” των: Ανδρεαδάκη Σ., Κατσαργύρη Β., Μέτη Σ., Μπρουχούτα Κ., Παπασταυρίδη Σ. και Πολύζου Γ.

Για την πληρέστερη ενημέρωση των διδασκόντων δίνονται ειδικότερες οδηγίες για κάθε κεφάλαιο.

Οι οδηγίες κατά κεφάλαιο έχουν ως εξής:

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφάλαιο 1. Το κεφάλαιο αυτό **δε θα διδαχθεί**.

Κεφάλαιο 2. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 12 διδακτικές ώρες.

Στην αρχή του κεφαλαίου διαπιστώνεται η ανάγκη διεύρυνσης του $\mathbb{R}$ σε ένα σύνολο $\mathbb{C}$ στο οποίο να έχουν λύση οι εξισώσεις 2ου βαθμού με αρνητική διακρίνουσα. Το νέο σύνολο $\mathbb{C}$ εφοδιάζεται με πράξεις αντίστοιχες με αυτές του $\mathbb{R}$ οι οποίες έχουν τις ίδιες ιδιότητες στα δύο σύνολα. Στη συνέχεια γίνεται γεωμετρική ερμηνεία των στοιχείων του $\mathbb{C}$ τα οποία ονομάζονται μιγαδικοί αριθμοί. Η γεωμετρική ερμηνεία είναι αυτή που θα βοηθήσει τους μαθητές να εμπεδώσουν την έννοια των μιγαδικών αριθμών, αλλά και θα τους προσφέρει γόνιμες ιδέες και ερεθίσματα που καλλιεργούν την ερευνητική τους διάθεση.

Ακολουθούν οι πράξεις με μιγαδικούς, οι δυνάμεις μιγαδικών, οι συζυγείς μιγαδικοί και η επίλυση της εξίσωσης 2ου βαθμού που αποτελούν μια ενότητα. Δεν γίνεται αναφορά στην ύπαρξη του αντιστρόφου, ούτε στον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας μιγαδικού και γενικότερα δεν δίνεται ιδιαίτερη σημασία στις ιδιότητες των πράξεων που καθορίζουν τη δομή ενός σώματος, αλλά στην τεχνική της εκτέλεσής τους.

Η επόμενη ενότητα αναφέρεται στο μέτρο των μιγαδικών. Δίνεται ιδιαίτερη σημασία στις γεωμετρικές εφαρμογές του μέτρου και έτσι αναδεικνύεται η συνάφεια των μιγαδικών με τις γεωμετρικές έννοιες. Στην παράγραφο αυτή πρέπει να τονιστεί ότι το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών παριστάνει την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο και συνεπώς η εξίσωση:

- $|z-z_0|=\alpha$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα α
- $|z-z_1|=|z-z_2|$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

Το κεφάλαιο συνεχίζεται με την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών, η οποία είναι χρήσιμη στον υπολογισμό μεγάλων δυνάμεων στο *C*, στη γεωμετρική ερμηνεία των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μιγαδικών και στην επίλυση εξισώσεων.

Η τελευταία ενότητα του κεφαλαίου είναι οι πολυωνυμικές εξισώσεις. Στις πολυωνυμικές εξισώσεις, να επιλυθεί πρώτα η εξίσωση $z^\nu=1$, όπου *ν* θετικός ακέραιος , και ως εφαρμογή αυτής να ακολουθήσει η επίλυση της εξίσωσης $z^\nu=a$, όπου *ν* θετικός ακέραιος και ***α*** **πραγματικός αριθμός** διαφορετικός του μηδενός. Η επίλυση να γίνει ως εξής:

Ο μη μηδενικός πραγματικός αριθμός α έχει τριγωνομετρική μορφή

$$\alpha=|\alpha|\ \sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta\ , \qquad \text{με } \theta=\begin{cases}0, & \alpha\nu\ \alpha>0\\ \pi, & \alpha\nu\ \alpha<0\end{cases},$$

οπότε παίρνει τη μορφή:

$$a=\left(\sqrt[\nu]{|\alpha|}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu}+i\eta\mu\frac{\theta}{\nu}\right)\right)^\nu=z_0^\nu, \qquad \text{όπου}$$

$$z_0=\sqrt[\nu]{|\alpha|}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu}+i\eta\mu\frac{\theta}{\nu}\right), \qquad \text{με } \theta=\begin{cases}0, & \alpha\nu\ \alpha>0\\ \pi, & \alpha\nu\ \alpha<0\end{cases}$$

Έτσι η εξίσωση $z^\nu=\alpha$ γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} z^\nu=\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad z^\nu=z_0^\nu \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^\nu=1 \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \text{ νιοστή ρίζα της μονάδας} \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{z_0}=\omega^k,\ k=0,1,2,\dots,\nu-1 \\ &\Leftrightarrow z=z_k=z_0\omega^k,\ k=0,1,2,\dots,\nu-1 \end{aligned}$$

Άρα οι νιοστές ρίζες του αριθμού α είναι οι νιοστές ρίζες της μονάδας πολλαπλασιασμένες με το μιγαδικό z_0. Έτσι, για παράδειγμα:

- Η εξίσωση $z^4=16$, επειδή $z_0=\sqrt[4]{16}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{0}{4}+i\eta\mu\frac{0}{4}\right)=2$, έχει τέσσερις ρίζες, τους αριθμούς:

  $z_k=2\omega^k$, $k=0,1,2,3$ όπου $\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{4}+i\eta\mu\frac{2\pi}{4}=i$

- Η εξίσωση $z^4=-16$, επειδή $z_0=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)$, έχει τέσσερις ρίζες, τους αριθμούς:

  $z_k=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)\omega^k$, $k=0,1,2,3$, όπου $\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{4}+i\eta\mu\frac{2\pi}{4}=i$.

Τέλος, επιλύονται πολυωνυμικές εξισώσεις με πραγματικούς συντελεστές.

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

1. Να γνωρίζουν:
α) την έννοια του μιγαδικού αριθμού και
β) πότε δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι.

2. Να μπορούν να βρίσκουν:
α)το άθροισμα, το γινόμενο, τη διαφορά και το πηλίκο μιγαδικών αριθμών
β)το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού και να λύνουν προβλήματα σε συνδυασμό με τις κωνικές τομές.

3. Να γνωρίζουν:
α)την έννοια του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού
β)τις ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών αριθμών.

4. Να μπορούν να γράφουν ένα μιγαδικό αριθμό σε τριγωνομετρική μορφή και να υπολογίζουν
α)το γινόμενο και το πηλίκο μιγαδικών αριθμών που είναι γραμμένοι σε τριγωνομετρική μορφή.
β)ακέραιες δυνάμεις μιγαδικών αριθμών που είναι γραμμένοι σε τριγωνομετρική μορφή (Τύπος De Moivre).

5. Να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $z^\nu=$α με $\alpha\in\mathbb{R}$ και απλές πολυωνυμικές εξισώσεις με **πραγματικούς** συντελεστές.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Δεν θα διδαχθούν οι παράγραφοι 2.4 **«Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού»** και 2.5 **«Πολυωνυμικές εξισώσεις στο $\mathbb{C}$ ».**

ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφάλαιο 1. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 24 διδακτικές ώρες.

Το κεφάλαιο αυτό αποτελείται από τρεις επιμέρους ενότητες:
α) Τις βασικές έννοιες της ανάλυσης,
β) Το όριο συνάρτησης σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$ και
γ) Τη συνέχεια συνάρτησης.

Α) Το περιεχόμενο της πρώτης ενότητας είναι σημείο αναφοράς για τα επόμενα. Οι περισσότερες από τις έννοιες που περιέχονται στην ενότητα αυτή είναι ήδη γνωστές στους μαθητές. Γι' αυτό η διδασκαλία δεν πρέπει να στοχεύει στην εξυπαρχής αναλυτική παρουσίαση γνωστών εννοιών, αλλά στο να δίνει "αφορμές" στους μαθητές να ανατρέχουν στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων και να επαναφέρουν στη μνήμη τους γνωστές έννοιες και προτάσεις που θα τις χρειαστούν στα επόμενα.

Επισημαίνεται ότι το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται στην εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, έχουν σκοπό την άσκηση των μαθητών στην επίλυση ανισώσεων, των οποίων γίνεται χρήση και στα επόμενα κεφάλαια.

Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης προσδιορίζεται, όταν χρειάζεται, μόνο με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Αργότερα, βέβαια, για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθεί και η παράγωγος.

Η μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης, που περιλαμβάνονται στην ενότητα αυτή, μελετώνται διεξοδικά στο κεφ. 2 με τη βοήθεια των παραγώγων.

Β) Στη δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου αυτού εισάγεται εποπτικά με κατάλληλα παραδείγματα η έννοια του ορίου συνάρτησης *f* στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Προϋπόθεση για την ύπαρξη του ορίου μιας συνάρτησης στο x_0 είναι να ορίζεται σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β).

Κατά την εποπτική διδασκαλία του ορίου, για οικονομία χρόνου, συνιστάται τα σχήματα και η ερμηνεία τους να γίνονται με διαφάνειες ή με φωτοτυπίες, που θα μοιραστούν στους μαθητές, ή ακόμα και μέσα από ανοικτά βιβλία.

Επισημαίνεται εδώ ότι η διδασκαλία του ορίου **δεν αποτελεί αυτοσκοπό** αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή στις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος που αποτελούν και το κέντρο βάρους του Β΄ μέρους. Γι' αυτό **πρέπει να αποφεύγεται** η άσκοπη ασκησιολογία και η λύση ασκήσεων με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbf{R}$. Ο προσδιορισμός του ορίου συνάρτησης πρέπει να γίνεται με εφαρμογή των ιδιοτήτων των ορίων. Όρια, τα οποία υπολογίζονται ευκολότερα με τον κανόνα De L' Hospital, να διδαχθούν αργότερα (κεφ. 2) με τη βοήθεια του κανόνα αυτού. Ο ορισμός του ορίου συνάρτησης στο x_0 αναγράφεται μόνο για την πληρότητα του κεφαλαίου αυτού.

Επίσης εποπτικά ορίζεται η έννοια του μη πεπερασμένου ορίου συνάρτησης στο $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, ενώ τα όρια προσδιορίζονται και στην περίπτωση αυτή μόνο με τη βοήθεια των ιδιοτήτων τους. Ο ορισμός αναγράφεται μόνο για την πληρότητα του βιβλίου

ΣΧΟΛΙΟ

Κατά τον υπολογισμό του $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$, είναι αναγκαίο να ισχύει

$$g(x) \neq u_0, \quad \text{κοντά στο } x_0.$$

Πράγματι, ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις *f, g* με

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 1, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}.$$

Τότε

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases},$$

Οπότε, για $x_0 = 0$, έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{x \to 0} f(g(x)) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Όμως $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, οπότε

$$\lim_{u \to u_0} f(u) = \lim_{u \to 0} f(u) = \lim_{u \to 0} 0 = 0\,\mathbf{.}$$

Έτσι, έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) \neq \lim_{u \to 0} f(u)$$

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι

$$g(x) = u_0 = 0, \quad \text{κοντά στο } x_0.$$

Γ) Στην τρίτη και τελευταία ενότητα του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζεται εποπτικά η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Τα θεωρήματα Bolzano και ενδιάμεσης τιμής χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του προσήμου μιας συνεχούς συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της καθώς και για να διαπιστωθεί αν η εξίσωση $f(x) = 0,\ x \in [\alpha, \beta]$ έχει ρίζες στο (α, β). Επισημαίνεται, ότι **ο υπολογισμός του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης καθώς και της μέγιστης και ελάχιστης τιμής της θα γίνει με τη βοήθεια των παραγώγων.**

Σε γενικές γραμμές με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

1. Να μπορούν να βρίσκουν από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης
- το πεδίο ορισμού της
- το σύνολο τιμών της
- την τιμή της σ' ένα σημείο x_0.

2. Να γνωρίζουν τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων.

3. Να μπορούν να βρίσκουν το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο και τη σύνθεση απλών συναρτήσεων.

4. Να γνωρίζουν την έννοια της συνάρτησης "$1-1$", τις βασικές ιδιότητες της και να κατανοήσουν τη διαδικασία εύρεσης της αντίστροφης μιας απλής συνάρτησης. Να γνωρίζουν, επιπλέον, ότι οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.

5. Να μπορούν να εκφράζουν, με τη βοήθεια συνάρτησης, τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι τιμές δύο μεγεθών σε διάφορα προβλήματα.

6. Να μπορούν να βρίσκουν το όριο μιας συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν δίνεται η γραφική της παράσταση.

7. Να γνωρίζουν τις ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθειά τους να υπολογίζουν τα όρια απλών συναρτήσεων.

8. Να μπορούν να διαπιστώνουν την ύπαρξη μη πεπερασμένων ορίων συναρτήσεων από τη γραφική τους παράσταση.
9. Να μπορούν να υπολογίζουν τα όρια πολυωνυμικών ή ρητών συναρτήσεων στο $+\infty$ και στο $-\infty$.
10. Να γνωρίζουν τις γραφικές παραστάσεις της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης και τα όρια τα σχετικά με τις συναρτήσεις αυτές.
11. Να γνωρίζουν την έννοια της ακολουθίας και την έννοια του ορίου ακολουθίας.
12. Να κατανοήσουν την έννοια της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
13. Να αναγνωρίζουν τη συνέχεια μιας συνάρτησης f σε σημείο ή διάστημα, από τη γραφική παράστασή της.
14. Να γνωρίζουν τις βασικές συνεχείς συναρτήσεις και ότι το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο, το πηλίκο καθώς και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.
15. Να γνωρίζουν τα βασικά θεωρήματα: Bolzano, ενδιάμεσης τιμής και μέγιστης - ελάχιστης τιμής, όταν η συνάρτηση ορίζεται σε κλειστό διάστημα και να μπορούν να τα εφαρμόζουν, στην εύρεση του προσήμου μιας συνεχούς συνάρτησης, στην εύρεση του συνόλου τιμών και του πλήθους των ριζών συναρτήσεων των οποίων είναι γνωστά τα διαστήματα μονοτονίας και το είδος της μονοτονίας.

Κεφάλαιο 2. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 35 διδακτικές ώρες.

Στο κεφάλαιο αυτό καθώς και στο επόμενο καταβάλλεται κάθε προσπάθεια για την υλοποίηση του κύριου στόχου της διδασκαλίας της Ανάλυσης που είναι: η χρήση της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης στις εφαρμογές. Με αφορμή την προσπάθεια για τον ορισμό της εφαπτομένης μιας καμπύλης $y=f(x)$ σε ένα σημείο της και της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού εισάγεται η έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο της. Έτσι καθορίζεται η γεωμετρική σημασία της παραγώγου της $y=f(x)$ σ' ένα σημείο της που είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της στο σημείο αυτό, καθώς και η φυσική σημασία της παραγώγου που είναι ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους π.χ. στιγμιαία ταχύτητα, ένταση ρεύματος κτλ.

Σ' όλο το κεφάλαιο γίνεται ευρεία χρήση της εποπτικής παρουσίασης των διαφόρων προτάσεων ενώ οι εξειδικευμένες αποδείξεις παραλείπονται. Ακόμη το κεφάλαιο είναι εμπλουτισμένο με πολλές εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού στη Γεωμετρία και τις άλλες επιστήμες.

Σε γενικές γραμμές με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

1. Να γνωρίσουν τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης σ' ένα σημείο x_0 και να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.
2. Να γνωρίζουν τις έννοιες ταχύτητα και επιτάχυνση κινητού, οριακό κόστος, οριακή είσπραξη, οριακό κέρδος και τη σχέση τους με την έννοια της παραγώγου.
3. Να γνωρίζουν σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης ορίζεται η εφαπτομένη και να μπορούν κάθε φορά να σχηματίζουν την εξίσωσή της.
4. Να γνωρίζουν:
   - ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση σε σημείο x_0 είναι συνεχής στο σημείο αυτό
   - τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων

- τον κανόνα της αλυσίδας και
- να μπορούν με τη βοήθειά τους να βρίσκουν παραγώγους συναρτήσεων.

5. Να κατανοήσουν τα θεωρήματα Rolle, Μέσης Τιμής και Fermat και να μπορούν να τα εφαρμόζουν σε απλές ασκήσεις.

6. Να μπορούν να προσδιορίζουν τα διαστήματα στα οποία μια συνάρτηση είναι:
- Σταθερή
- γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα
- κυρτή ή κοίλη
- και να βρίσκουν:

  α) τα τοπικά ακρότατα και

  β) τα σημεία καμπής της.

7. Να μπορούν να βρίσκουν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης και το σύνολο λύσεων μιας εξίσωσης $f(x)=0$.

8. Να μπορούν να εφαρμόζουν τους κανόνες de L' Hospital στον υπολογισμό ορίων.

9. Να μπορούν να βρίσκουν τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

10. Να μπορούν να χαράζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με τη βοήθεια των παραγώγων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κατά τη διδασκαλία του 2ου κεφαλαίου
- **Να μη διδαχθούν:**

  α) Η υποπαράγραφος με τίτλο «Κατακόρυφη εφαπτομένη».

  β) Η απόδειξη του θεωρήματος της σελίδας 262 και

  γ) Το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου (Θεώρημα σελ. 264).
- Η μελέτη των κυρτών, κοίλων και σημείων καμπής να περιοριστεί σε **συνεχείς** συναρτήσεις που είναι **δυο, τουλάχιστον, φορές παραγωγίσιμες** σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Κεφάλαιο 3. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 32 διδακτικές ώρες.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται πρώτα η παράγουσα και το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης και στη συνέχεια η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός παραβολικού χωρίου. Ο τρόπος αυτός εισαγωγής του ολοκληρώματος, μολονότι δε συμφωνεί με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ολοκληρώματος, εξυπηρετεί τη διδακτική πράξη. Γιατί, εφόσον προηγείται η παραγώγιση, είναι εύλογο να ακολουθήσει αμέσως το αόριστο ολοκλήρωμα ως αποτέλεσμα της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης. Επιπλέον, με τη διάταξη αυτή της ύλης, είναι δυνατόν από πολύ νωρίς να γίνονται εφαρμογές του ολοκληρωτικού λογισμού οι οποίες ανάγονται στη λύση απλών "διαφορικών εξισώσεων". Οι διαφορικές εξισώσεις που μελετώνται στο κεφάλαιο αυτό είναι οι: α) διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές και β) οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως.

Ειδικότερα με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

1. Να κατανοήσουν τις έννοιες
- παράγουσα ή αρχική συνάρτηση
- αόριστο ολοκλήρωμα
- και να μπορούν να υπολογίζουν απλά αόριστα ολοκληρώματα με τη βοήθεια των μεθόδων ολοκλήρωσης.

2. Να επιλύουν προβλήματα στα οποία δίνεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο και ζητείται η συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση των δύο μεγεθών.
3. Να επιλύουν απλές διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές και απλές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις α΄ τάξεως καθώς και απλά προβλήματα των οποίων η επίλυση ανάγεται στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων των παραπάνω μορφών.
4. Να κατανοήσουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με τη βοήθεια του παραβολικού χωρίου.
5. Να κατανοήσουν τις στοιχειώδεις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και να μπορούν να τις εφαρμόζουν.
6. Να γνωρίζουν το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να μπορούν να το εφαρμόζουν στον υπολογισμό απλών ολοκληρωμάτων.
7. Να κατανοήσουν το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού και να μπορούν να το εφαρμόζουν σε ασκήσεις και προβλήματα.
8. Να υπολογίζουν τα εμβαδά επίπεδων χωρίων που ορίζονται από τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κατά τη διδασκαλία του 3^{ου} κεφαλαίου να μη διδαχτούν:

α) Η παράγραφος 3.3 με τίτλο: **«Διαφορικές Εξισώσεις»** και

β) Η παράγραφος 3.6 με τίτλο: **«Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού»**.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ " ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ "

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφάλαιο 1

I.

1. Α **2.** Ψ **3.** Α **4**. Α **5.** Α **6.** Ψ **7.** Ψ **8.**Α **9.** Ψ
10. Ψ **11.** Ψ **12.** Α **13.** Α **14.** Ψ **15.** Ψ **16.** Α **17.** Α **18.** i) Ψ ii) Ψ

II.

1. Γ, **2.** Α, **3.** Γ, **4.** Β, **5.** Δ

III.

1→β, 2→α, 3→δ

Κεφάλαιο 2

1. i) Δ ii) Γ **2.** Α, Β

3. $|z-i|=|z+i|\to x'x$ $|z-1|=|z+1|\to y'y$

$|z-1|=|z-i|\to y=x$ $|z+1|=|z+i|\to y=x$

4. $k+ki\to 45^{o}$, $k-ki\to -45^{o}$, $-k-ki\to 225^{o}$, $-k+ki\to 135^{o}$

5. Α, Β, Δ,

6. $A:\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, B:-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, \Gamma:-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}, \Delta:\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

7 $\bar{z}\to \Delta$, $\frac{1}{2}z\to E$, , $\frac{1}{z}\to \Theta$, $-\bar{z}\to \Gamma$, $-\bar{z}\to B$

ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφάλαιο 1

I.

1. Ψ, Α, **2.** Α, **3.** Ψ, **4.** Ψ, **5.** Α, Ψ, **6.** Α, **7.** Ψ, **8.** Ψ,
9. Ψ, **10.** Α, **11.** Α, **12.** Α

II.

1. Β **2.** Ε, **3.** Ε, **4.** Δ

III.

1. Γ, **2.** Α, Γ, Ε, **3.** Ε

Κεφάλαιο 2

I.

1. Α, **2.** Α, **3.** Α, **4.** Ψ, Α, **5.** Α, Ψ, **6.** Α, **7.** Ψ, **8.** Α,
9. Ψ, Α **10.** Ψ, Ψ, Ψ, Α, **11.** Ψ, Α, Ψ, **12.** Α

II.

1. Β **2.** Γ, **3.** Ε, **4.** Γ, **5.** Γ, **6.** Γ, **7.** Ε, **8.** Γ

III.

1. α→Ε, β→Α, γ→Β, δ→Δ
2. 1→Δ, 2→Γ, 3→Α

Κεφάλαιο 3

I.

1. Α, **2.** Ψ, **3.** Α, **4.** Ψ, **5.** Α, **6.** Ψ, **7.** Α, **8.** Α **9.** Α, **10.** Α, **11.** Α, **12.**Α, **13.** Α, **14.** Ψ

ΙΙ.

1. Δ, **2.** Δ, **3.** Δ, **4.** Α, **5.** Γ, **6.** Β, **7.** Δ, **8.** Β, **9.** Γ, **10.** Γ, **11.** Δ

ΙΙΙ.

1. Δ, **2.** Β, Δ

3. Αν F είναι μια παράγουσα της $f(x)=\frac{1}{x}$, τότε η σχέση $\int\frac{1}{x}dx=1+\int\frac{1}{x}dx$ γράφεται $F(x)+c_1=1+F(x)+c_2$, οπότε $c_1-c_2=1$ και **όχι**, $0=1$. Επομένως, δεν ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής για την πρόσθεση αόριστων ολοκληρωμάτων.

4. Επειδή το x παίρνει και την τιμή 0, δεν μπορούμε να θέσουμε $x=\frac{1}{u}\neq 0$.

5. $F(0)=0$, $F(2)=2$, $F(3)=4$, $F(4)=6$, $F(6)=12$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ ΕΠΙ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Άσκηση 6 / Β΄ ομάδας / §1.2

Κατά την επίλυση της άσκησης αυτής, να τονιστούν τα ακόλουθα:

Ερώτημα (ii):

Επειδή $D_{f\circ g}=D_g=\mathbf{R}$, θα ισχύει $g(\mathbf{R})\subseteq D_f$. Όμως $g(\mathbf{R})=\ -\infty, 0\ $. Άρα ισχύει:

$$D_f\supseteq g(\mathbf{R})=\ -\infty, 0\ .$$

Αν $y\in g(\mathbf{R})=\ -\infty, 0\ $, τότε θα είναι $y=g(x)=-x^2$, για κάποιο $x\in D_g=\mathbf{R}$. Επομένως θα ισχύει

$$f(y)=f(g(x))=\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1-y}$$

Άρα, στο $g(\mathbf{R})=\ -\infty, 0$ η f ορίζεται από τον τύπο $f(x)=\sqrt{1-x}$. Στο $D_f-g(\mathbf{R})$ η f μπορεί να οριστεί με οποιοδήποτε τρόπο. Επομένως, υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις f που ικανοποιούν τις υποθέσεις του ερωτήματος αυτού. Αυτές περιγράφονται από τον τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}\ , & x\in\ -\infty, 0\\ h(x)\ , & x\in A-\ -\infty, 0\end{cases},$$

όπου $A=D_f$ είναι <u>οποιοδήποτε</u> υπερσύνολο του $-\infty, 0$ και h <u>οποιαδήποτε</u> συνάρτηση που μπορεί να οριστεί στο $A-\ -\infty, 0\ $.

Πράγματι, η συνάρτηση $f\circ g$:

- Ορίζεται εφόσον: $\begin{cases}x\in D_g\\ \text{και}\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbf{R}\\ -x^2\in A\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbf{R}$. Άρα $D_{f\circ g}=\mathbf{R}$.
- Έχει τύπο:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{1-g(x)}=\sqrt{1-(-x^2)}=\sqrt{1+x^2},$$

διότι $g(x)=-x^2\leq 0$, για κάθε $x\in D_g$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι δεν έχει σημασία για τη σύνθεση $f\circ g$ ο τύπος της f στο $A-(-\infty,0)$.

<u>Ερώτημα (iii):</u>

Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις f που ικανοποιούν τις υποθέσεις του ερωτήματος αυτού. Αυτές περιγράφονται από τον τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} ημx\ ,\ x\in S \\ -ημx\ ,\ x\notin S \end{cases},\quad \text{όπου S τυχαίο υποσύνολο του } \mathbf{R}.$$

και τούτο διότι η ισότητα:

$$f^2(x)=ημ^2x,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbf{R}$$

σημαίνει ότι:

$$f(x)=ημx \text{ για κάποια } x\in\mathbf{R} \text{ και } f(x)=-ημx \text{ για τα υπόλοιπα } x\in\mathbf{R}.$$

Εδώ, πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα ότι, όταν ισχύει:

$$f^2(x)=g^2(x),\ \text{για κάθε } x\in A\subseteq\mathbf{R},$$

<u>**δεν σημαίνει**</u> ότι ισχύει:

$$(f(x)=g(x),\ \text{για κάθε } x\in A) \text{ ή } (f(x)=-g(x),\ \text{για κάθε } x\in A),$$

αλλά σημαίνει ότι:

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\in B \\ -g(x), & x\in A-B \end{cases},\ \text{όπου B κάποιο υποσύνολο του A.}$$

Ως παράδειγμα αναφέρουμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=x \quad \text{και} \quad g(x)=|x|,$$

για τις οποίες ισχύει:

$$f^2(x)=g^2(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbf{R}.$$

Όμως οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι ούτε ίσες, ούτε αντίθετες.

Τα παραπάνω πρέπει να τονιστούν για άλλη μια φορά κατά την επίλυση της **Άσκησης 7 / Β΄ Ομάδας / §1.8.**

Κατά την επίλυση των παραπάνω ασκήσεων πρέπει, επιπλέον, να τονιστεί ότι, όταν ισχύει:

$$f(x)\cdot g(x)=0,\ \text{για κάθε } x\in A\subseteq\mathbf{R},$$

δεν σημαίνει ότι ισχύει:

$$(f(x)=0,\ \text{για κάθε } x\in A\subseteq\mathbf{R}) \text{ ή } (g(x)=0,\ \text{για κάθε } x\in A\subseteq\mathbf{R}),$$

αλλά σημαίνει ότι υπάρχει $B\subseteq A$, τέτοιο ώστε:

$$f(x)=0,\ \text{για κάθε } x\in B \quad \text{και} \quad g(x)=0,\ \text{για κάθε } x\in A-B.$$

Ως παράδειγμα αναφέρουμε τις συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ 0, & x\geq 0\end{cases}$$

Για τις οποίες ισχύει: f(x)·g(x)=0, για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Όμως, καμία από τις συναρτήσεις αυτές δεν είναι η μηδενική συνάρτηση.

<u>Άσκηση 3 / Α΄ ομάδας / §1.3</u>

Κατά την επίλυση της άσκησης αυτής, να τονιστούν τα ακόλουθα:

- Τα κοινά σημεία (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f με την ευθεία $y=x$ είναι τα ίδια με κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της αντίστροφης της f με την ευθεία $y=x$ (σχήματα: 1^o ,3^o και 4^o).
- Ενδέχεται οι γραφικές παραστάσεις μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f και της αντίστροφής της να έχουν κοινά σημεία και εκτός της ευθείας $y=x$ (σχήμα: 4^o)

<u>Άσκηση 3 / Β΄ ομάδας / §2.6 & Άσκηση 5 / Β΄ ομάδας / §2.8</u>

2) Κατά την επίλυση των ασκήσεων αυτών να δοθεί ο ορισμός της **επιταχυνόμενης** (αντιστοίχως **επιβραδυνόμενης)** κίνησης ως εξής:

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Η ευθύγραμμη κίνηση ενός κινητού λέγεται **επιταχυνόμενη** (αντιστοίχως **επιβραδυνόμενη**), όταν το μέτρο της ταχύτητας υ(t), δηλαδή η |υ(t)|, αυξάνεται (αντιστοίχως μειώνεται).

Με βάση τον ορισμό αυτό:

- Στην κατακόρυφη βολή σώματος προς τα άνω η ταχύτητα υ(t) είναι γνησίως φθίνουσα, αφού υ΄(t)= α(t)= —g<0. Επομένως:
  - Όταν το σώμα ανέρχεται, επειδή υ(t)>0 και υ(t)↓ , θα ισχύει |υ(t)| ↓ , οπότε η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη, ενώ
  - Όταν το σώμα κατέρχεται, επειδή υ(t)<0 και υ(t)↓ , θα ισχύει |υ(t)| ↑ , οπότε η κίνηση είναι επιταχυνόμενη.

- Στην άσκηση 3(iii) της σελίδας 257 έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

t	0	1	3	4	5

Πρόσημο της α(t)=x΄΄(t)	+ 0 – 0 + +
Μονοτονία της υ(t)=x΄(t)	-16 ΤΕ ↗ 0 ΤΜ ↘ -16 ΤΕ ↗ 0 ↗ 64 ΤΜ
Πρόσημο της **υ(t)=x΄(t)**	– 0 – – 0 +
Μονοτονία της $\lvert$υ(t)$\rvert$	16 ΤΜ ↘ 0 ΤΕ ↗ 16 ΤΜ ↘ 0 ΤΕ ↗ 64 ΤΜ

Επομένως η κίνηση είναι επιταχυνόμενη στα διαστήματα [1,3] και [4,5] (εκεί που ισχύει υ(t)α(t)≥0), και επιβραδυνόμενη στα διαστήματα [0,1] και [3,4] (εκεί που ισχύει υ(t)α(t)≤0).

- Στην άσκηση 5(ii) της σελίδας 278 η κίνηση είναι επιταχυνόμενη στα διαστήματα [0, t1] και [t2, t3], όπου υ(t)α(t)≥0, και επιβραδυνόμενη στα διαστήματα [t_1, t_2] και [t_3,+∞), όπου υ(t)α(t)≤0.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ: Ώρες 2 εβδομαδιαίως

Θα χρησιμοποιηθεί το βιβλίο “Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής” των Αδαμόπουλου Λ., Δαμιανού Χ., και Σβέρκου Α. Κατά τη συγγραφή του καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε το περιεχόμενό του να ανταποκρίνεται στις δυνατότητες των μαθητών για τους οποίους προορίζεται και να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στο χρόνο που προβλέπεται από το αντίστοιχο ωρολόγιο πρόγραμμα.

Η ύλη του βιβλίου περιλαμβάνει τα κεφάλαια:

1º : Διαφορικός Λογισμός
2º : Στατιστική
3º : Πιθανότητες.

Το κάθε κεφάλαιο αρχίζει με μια σύντομη εισαγωγή, η οποία αναφέρεται στην ιστορική εξέλιξη και στη χρησιμότητα του αντίστοιχου κλάδου. Το γεγονός ότι το βιβλίο απευθύνεται σε όλους τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση που θα ακολουθήσουν, έχει επηρεάσει σημαντικά τη διάταξη της ύλης, τον τρόπο με τον οποίο αυτή παρουσιάζεται, καθώς και την επιλογή των ασκήσεων. Έτσι:

- Στην ανάπτυξη των κεφαλαίων ακολουθείται η ιστορική εξέλιξη των εννοιών και η εποπτική παρουσίασή τους.
- Αποφεύγονται οι αυστηρές αποδείξεις, αλλά μέσα από κατάλληλα παραδείγματα και εφαρμογές γίνεται προσπάθεια να εξηγηθούν οι διάφορες έννοιες και να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο αυτές χρησιμοποιούνται.
- Δε συμπεριλαμβάνονται ασκήσεις των οποίων η λύση παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία ούτε ασκήσεις που λύνονται με τεχνάσματα. Αντιθέτως, έγινε προσπάθεια να επιλεγούν ασκήσεις και προβλήματα με τα οποία οι μαθητές εμπεδώνουν τη θεωρία, καλλιεργούν τη λογική και την κριτική σκέψη τους και ασκούνται στην οργάνωση των δεδομένων.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου έχουν προστεθεί "ερωτήσεις κατανόησης", οι οποίες επιδέχονται σύντομη απάντηση και στοχεύουν στην κατανόηση της θεωρίας και στη διευκρίνιση ορισμένων εννοιών. Οι ερωτήσεις αυτές σκόπιμο είναι να δίνονται στους μαθητές μαζί με την επεξεργασία της αντίστοιχης παραγράφου.

Θα πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα ότι το διδακτικό βιβλίο είναι ένα μέσο διδασκαλίας και δεν μπορεί να υποκαταστήσει τον διδάσκοντα. Ένας καθηγητής που προετοιμάζεται με επιμέλεια και προβληματίζεται συνεχώς για τον προσφορότερο τρόπο μετάδοσης της γνώσης στους μαθητές του είναι βέβαιο ότι θα επιτύχει σε μεγάλο βαθμό τους γενικούς και ειδικούς στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Στις ειδικές οδηγίες κατά κεφάλαιο που ακολουθούν, δίνονται πρόσθετα θεωρητικά στοιχεία, τα οποία πρέπει να έχει υπόψη του ο διδάσκων χωρίς να απαιτείται η διδασκαλία τους στους μαθητές, καθώς και ένα ενδεικτικό χρονοδιάγραμμα, που θα βοηθήσει τον διδάσκοντα στον προγραμματισμό της διδασκαλίας του.

Κεφάλαιο 1. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 15 διδακτικές ώρες.

Σε όλο το κεφάλαιο γίνεται ευρεία χρήση της εποπτείας και των παραδειγμάτων για την ερμηνεία και για την κατανόηση των διάφορων εννοιών και προτάσεων.

Στην αρχή της §**1.1** γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνάρτησης και των ιδιοτήτων της. Πολλές από τις έννοιες και τους συμβολισμούς αυτού του κεφαλαίου είναι ήδη γνωστά στους μαθητές από προηγούμενες τάξεις γι’ αυτό και η διδασκαλία τους δεν πρέπει να στοχεύει στην αναλυτική παρουσίασή τους, αλλά στο να τα επαναφέρουν οι μαθητές στη μνήμη τους, επειδή θα τους χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια.

Στην ίδια παράγραφο παρουσιάζεται μέσω παραδειγμάτων και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα η έννοια του ορίου και γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνεχούς συνάρτησης. Επισημαίνεται ότι η διδασκαλία των εννοιών αυτών δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου. Δεν πρέπει επομένως να καθυστερήσει η διδασκαλία με άσκοπη "ασκησιολογία". Κατά τη διδασκαλία των εννοιών της παραγράφου αυτής, για εξοικονόμηση χρόνου, συνιστάται οι πίνακες, τα σχήματα και η ερμηνεία τους να προσφέρονται σε διαφάνειες ή σε φωτοτυπίες ή, στην περίπτωση που αυτό είναι αδύνατον, οι μαθητές να χρησιμοποιούν τα βιβλία τους.

Σχετικά με την έννοια της συνεχούς συνάρτησης αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η πρόταση $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ μας πληροφορεί ότι οι τιμές του $f(x)$ είναι πολύ κοντά στο $f(x_0)$, όταν το *x* είναι πολύ κοντά στο x_0. Αυτό σημαίνει ότι μικρές μεταβολές στο *x* έχουν ως αποτέλεσμα μόνο μικρές μεταβολές στις τιμές μιας συνεχούς συνάρτησης.

Στην §**1.2** εισάγεται η έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της. Η παράγωγος είναι ένα από τα θεμελιώδη εργαλεία των Μαθηματικών και χρησιμοποιείται σε ένα ευρύ φάσμα επιστημών.

Για τον ορισμό της παραγώγου ακολουθείται η ιστορική πορεία της εξέλιξης της έννοιας. Παρατηρούμε κατ’ αρχάς ότι ως εφαπτομένη ενός κύκλου (O, R) σε ένα σημείο του A θα μπορούσαμε να ορίσουμε την οριακή θέση μιας τέμνουσας AM, καθώς το M κινούμενο πάνω στον κύκλο τείνει να συμπέσει με το A. Με βάση την παρατήρηση αυτή ορίζουμε ως εφαπτομένη της καμπύλης μιας συνάρτησης *f* σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ την ευθεία η οποία διέρχεται από το *A* και έχει ως συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό *λ*= $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Δε δίνεται ο τύπος της εξίσωσης της εφαπτομένης της καμπύλης μιας συνάρτησης *f* σε ένα σημείο της $(x_0,\ f(x_0))$. Όμως, μέσα από εφαρμογές, εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο προσδιορίζεται κάθε φορά η εφαπτομένη αυτή, αφού γνωρίζουμε ένα σημείο της και μπορούμε να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσής της. Δε γίνεται επίσης αναφορά στην έννοια της κατακόρυφης εφαπτομένης. Μαθητές με αυξημένη μαθηματική περιέργεια θα ικανοποιήσουν τις αναζητήσεις τους αυτές στα Μαθηματικά της Θετικής και της Τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου.

Στη συνέχεια, διαπιστώνεται ότι και άλλα παραδείγματα, όπως ο προσδιορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού, του οριακού κόστους στην Οικονομία, της ταχύτητας μιας αντίδρασης στη Χημεία κτλ., οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της μορφής $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$. Το όριο αυτό, όταν υπάρχει, ονομάζεται παράγωγος της f στο t_0. Φυσικά το πρόβλημα της εφαπτομένης και το πρόβλημα της στιγμιαίας ταχύτητας έχουν προετοιμάσει το έδαφος, ώστε να γίνει αποδεκτός και κατανοητός ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της και η ερμηνεία της ως ρυθμού μεταβολής.

Στην §**1.3** ορίζεται **η** (πρώτη) **παράγωγος** μιας **συνάρτησης** *f*. Με τον όρο **παράγωγος της *f*** εννοείται η συνάρτηση *f '* , η οποία σε κάθε σημείο *x* του πεδίου ορισμού της *f*, όπου αυτή είναι παραγωγίσιμη, αντιστοιχίζει την παράγωγό της στο σημείο αυτό. Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η **δεύτερη παράγωγος** της *f* και ως παραδείγματα αναφέρονται η ταχύτητα ***υ*(*t*)=*x*'(*t*)** και η επιτάχυνση ***α*(*t*)=*x*"(*t*)** στην ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος. Ακολουθεί η παραγώγιση βασικών συναρτήσεων και οι κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου και σύνθετης συνάρτησης. Αναφέρονται μόνο οι αποδείξεις όσων τύπων και κανόνων είναι απλές.

Επισημαίνεται ότι στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$ και $\varepsilon\phi x$ το x εκφράζει το μέτρο μιας γωνίας σε ακτίνια (rad). Αν θ είναι το μέτρο της ίδιας γωνίας σε μοίρες, τότε $\eta\mu x = \eta\mu\theta^o$ και $x = \frac{\pi}{180}\theta$. Επομένως,

$$(\eta\mu\theta^o)'_\theta = (\eta\mu x)'_\theta = (\eta\mu x)'_x \cdot x_\theta{}' = \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}\sigma\upsilon\nu\theta^o .$$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Στην **§1.3** υλοποιείται ο κύριος στόχος της διδασκαλίας του κεφαλαίου, που είναι η χρησιμοποίηση των παραγώγων στον προσδιορισμό των ακροτάτων. Όπως και στις προηγούμενες παραγράφους, έτσι και εδώ για την κατανόηση των ιδιοτήτων κυριαρχεί η γεωμετρική εποπτεία. Για να συνδεθεί καλύτερα η σχέση του προσήμου της πρώτης παραγώγου με τα ακρότατα, μπορεί ο διδάσκων να αναφέρει παραδείγματα και από τη Φυσική. Έτσι, στο παράδειγμα της σελίδας 39 του βιβλίου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όταν το σώμα φτάσει στο υψηλότερο σημείο, η ταχύτητά του πρέπει να μηδενιστεί, διότι διαφορετικά το σώμα θα εξακολουθούσε να ανεβαίνει. Επομένως, βρίσκουμε ότι η χρονική στιγμή t που θα έχουμε το μέγιστο ύψος, δηλαδή το μέγιστο της συνάρτησης $h(t)=20t-5t^2$, είναι όταν $\upsilon(t)= h'(t)=20-10t=0$. Άρα για $t=2$ έχουμε το μέγιστο ύψος, που είναι ίσο με $h(2)=40-20=20$.

Στο βιβλίο, για τον προσδιορισμό των ακροτάτων, αναφέρεται και το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου. Σε πολλές περιπτώσεις το κριτήριο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ευκολότερα από τους μαθητές, αφού συνήθως τους απαλλάσσει από την επίλυση πολύπλοκων ανισώσεων για τον προσδιορισμό του προσήμου της πρώτης παραγώγου.

Οι μέθοδοι του Διαφορικού Λογισμού για τον προσδιορισμό των ακρότατων τιμών ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους έχουν πρακτική εφαρμογή σε πολλές περιοχές των επιστημών αλλά και της καθημερινής ζωής. Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων αυτό που κυρίως προέχει είναι η μετατροπή του προβλήματος που είναι διατυπωμένο στην καθημερινή γλώσσα σε πρόβλημα **μεγίστου** ή **ελαχίστου** με τον ορισμό μιας συνάρτησης, της οποίας πρέπει να βρεθούν τα ακρότατα. Είναι σκόπιμο επομένως να τονιστούν με τη βοήθεια κατάλληλου προβλήματος οι αρχές "επίλυσης προβλήματος", τις οποίες έχουν γνωρίσει οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις, και να προσαρμοστούν στη συγκεκριμένη κατάσταση. Επισημαίνεται ότι η διαδικασία επίλυσης προβλήματος δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια συλλογή στρατηγικών, τις οποίες κάθε λογικά σκεπτόμενος άνθρωπος πρέπει να χρησιμοποιήσει προκειμένου να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα.

Σχετικά με την επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια του Διαφορικού Λογισμού πρέπει να αναφερθεί ότι πολλά προβλήματα μεγίστου ή ελαχίστου περιέχουν διακριτές μεταβλητές. Για παράδειγμα, ο αριθμός των παραγόμενων μονάδων ενός προϊόντος, καθώς και ο αριθμός των εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο πρέπει να είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Ο Διαφορικός Λογισμός όμως δεν εφαρμόζεται απευθείας σε προβλήματα που περιέχουν διακριτές μεταβλητές. Ωστόσο, μπορούμε μερικές φορές να οδηγηθούμε στη λύση ενός τέτοιου προβλήματος υποθέτοντας ότι κάθε μεταβλητή παίρνει τιμές σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή σε κάποιο διάστημά του, ακόμα και αν η φυσική ερμηνεία της μεταβλητής έχει νόημα μόνο για διακριτές τιμές. Έτσι, χρησιμοποιώντας το Διαφορικό Λογισμό βρίσκουμε μια λύση για το μαθηματικό μοντέλο, η οποία ελπίζουμε ότι προσεγγίζει τη λύση του πραγματικού προβλήματος.

Γενικά, με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου και να μπορούν να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.
- Να μπορούν να βρίσκουν τις παραγώγους συναρτήσεων.

- Να κατανοήσουν ότι η γνώση του ρυθμού μεταβολής ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για το ίδιο το μέγεθος.
- Να μπορούν με τη βοήθεια των παραγώγων να επιλύουν προβλήματα ακροτάτων.

Κεφάλαιο 2 Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 16 διδακτικές ώρες.

Στην εποχή μας οι στατιστικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται ολοένα και περισσότερο για τη μελέτη σύνθετων επιστημονικών και κοινωνικών προβλημάτων, όπως είναι, για παράδειγμα, η μόλυνση του περιβάλλοντος, τα ατυχήματα, η ανεργία, ο πληθωρισμός, η υγεία, η οικονομία, η συμπεριφορά του εκλογικού σώματος κτλ. Οι μαθητές εφαρμόζοντας τη στατιστική μεθοδολογία σε διάφορες πρακτικές εφαρμογές εξοικειώνονται στο να επιχειρηματολογούν χρησιμοποιώντας αντικειμενικά επιχειρήματα, ενώ συγχρόνως ασκούνται στη δημιουργική και μεθοδολογική εργασία. Επίσης, η εξοικείωση με τη γλώσσα της Στατιστικής και η γνώση των δυνατοτήτων και των περιορισμών της στατιστικής μεθοδολογίας θα τους καταστήσει ικανούς, ώστε αργότερα, ως υπεύθυνοι πολίτες, να μπορούν να τηρούν κριτική στάση στον καταιγισμό των πληροφοριών που δέχονται είτε ως αναγνώστες είτε ως ακροατές από τα μέσα μαζικής ενημέρωσης, από τα γραφεία στατιστικών ερευνών, από τις διαφημίσεις κτλ.

Μεγάλο μέρος του κεφαλαίου της Στατιστικής έχει διδαχθεί στο Γυμνάσιο. Εδώ γίνεται συστηματικότερη παρουσίαση των σχετικών εννοιών, οι οποίες και συμπληρώνονται με την γραμμική παλινδρόμηση και τη συσχέτιση δύο μεταβλητών.

Για να μην καθυστερεί η διδασκαλία, οι στατιστικοί πίνακες και τα διαγράμματα, ο αριθμός των οποίων στο κεφάλαιο της Στατιστικής είναι μεγάλος, κρίνεται σκόπιμο να ετοιμάζονται σε φωτοτυπίες ή διαφάνειες πριν από το μάθημα. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, συνιστάται να γίνεται η επεξεργασία τους μέσα από το βιβλίο.

Στην §**2.1** πρέπει να καταβληθεί προσπάθεια, ώστε με κατάλληλα παραδείγματα να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες **πληθυσμός**, **μεταβλητή** (*ποσοτική, ποιοτική*), **απογραφή** και **δείγμα**. Να διευκρινιστεί ότι δε συμπίπτει το σύνολο των τιμών μιας μεταβλητής με τις παρατηρήσεις από την εξέταση ενός πληθυσμού ως προς τη μεταβλητή αυτή. Για παράδειγμα, οι τιμές της μεταβλητής “ομάδα αίματος” είναι Α, Β, ΑΒ και Ο, ενώ οι παρατηρήσεις από την εξέταση δέκα ατόμων μπορεί να είναι Α, Α, Β, Β, Β, ΑΒ, Α, ΑΒ, Ο, Β.

Όταν είναι πρακτικά αδύνατο ή οικονομικά ασύμφορο να εξετάσουμε κάθε μέλος ενός πληθυσμού, οδηγούμαστε στην εξέταση ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος. Είναι σημαντικό να αναγνωρίσουν οι μαθητές τη χρησιμότητα του δείγματος, από το οποίο μπορούν να προκύψουν αξιόπιστες πληροφορίες για ολόκληρο τον πληθυσμό.

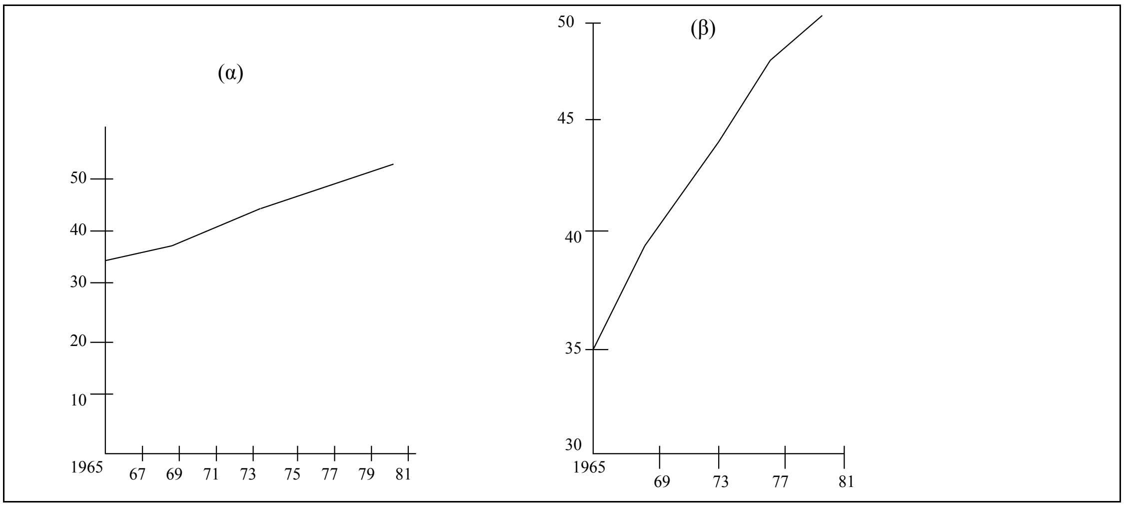
Στην §**2.2** παρουσιάζονται οι κατανομές συχνοτήτων και οι γραφικές παραστάσεις τους. Μια από τις απλούστερες διαδικασίες για την οργάνωση και τη συνοπτική παρουσίαση των δεδομένων είναι η κατανομή συχνοτήτων. Η κατανομή συχνοτήτων θεωρείται ως το πρώτο βήμα σε κάθε ανάλυση δεδομένων. Ανάλογα ορίζονται η κατανομή σχετικών συχνοτήτων, η κατανομή αθροιστικών συχνοτήτων και η κατανομή αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι:

- Η (απόλυτη) **συχνότητα ν_i** μιας τιμής x_i δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i στο δείγμα.
- Η **σχετική συχνότητα f_i** εκφράζει το ποσοστό (επί τοις %) μιας τιμής x_i, η οποία εμφανίζεται στο δείγμα των *ν* παρατηρήσεων. Γι’ αυτό η σχετική συχνότητα προσφέρεται για τη σύγκριση πληθυσμών, όταν εξετάζονται ως προς την ίδια μεταβλητή. Βέβαια με τις σχετικές συχνότητες χάνουμε τις απόλυτες συχνότητες. Αν όμως *ν* είναι το μέγεθος του δείγματος, τότε $\nu_i = f_i \cdot \nu$.

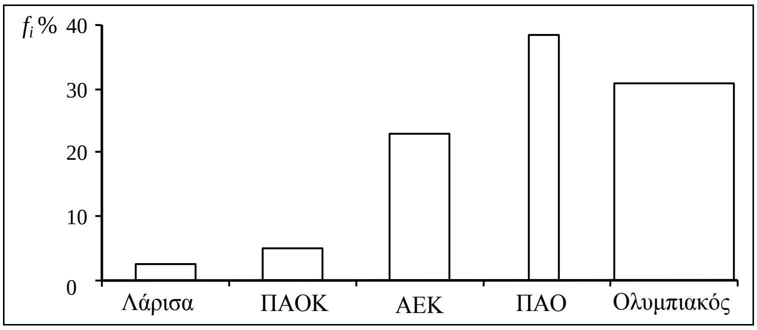
- Η **αθροιστική συχνότητα N_i** και η **αθροιστική σχετική συχνότητα F_i**, οι οποίες έχουν νόημα μόνο για ποσοτικές μεταβλητές, εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντιστοίχως των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες με x_i.

- Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να παραστήσουν γραφικά τα δεδομένα που έχουν συλλέξει, χρησιμοποιώντας κάθε φορά το κατάλληλο διάγραμμα. Ακόμη πρέπει να είναι σε θέση να «διαβάζουν» τα διάφορα διαγράμματα τα οποία παρουσιάζουν με άμεσο και οργανωμένο τρόπο τα στατιστικά δεδομένα και επιτρέπουν ορισμένες φορές να φανούν αμέσως οι σχέσεις που ενδεχομένως υπάρχουν. Πρέπει όμως να επιστήσουμε την προσοχή των μαθητών, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα, για τον κίνδυνο παραπλάνησης που υπάρχει από την ανάγνωση ενός στατιστικού διαγράμματος. Για παράδειγμα, στο σχήμα 1 τα δυο διαγράμματα (α) και (β) αναφέρονται στο ποσοστό των εργαζομένων γυναικών στο σύνολο του γυναικείου πληθυσμού μιας χώρας άνω των 16 ετών. Δίνουν όμως εντελώς διαφορετική εικόνα για το πως μεταβάλλεται το ποσοστό αυτό.



Σχήμα 1

Το διάγραμμα (β) προκύπτει από το (α), αν απλώς μεγεθύνουμε την κλίμακα στον άξονα των y, σμικρύνουμε την κλίμακα στον άξονα των x και θεωρήσουμε ως αρχή μετρήσεων στον άξονα των y την ένδειξη 30. Ανάλογες παραποιήσεις μπορούν να πραγματοποιηθούν με το ραβδόγραμμα κατασκευάζοντας τα ορθογώνια με διαφορετικό πλάτος. Με τον τρόπο αυτό η οποιαδήποτε διαφορά στις συχνότητες εμφανίζεται πολλαπλάσια από ό,τι πραγματικά είναι. Για παράδειγμα, αν για την άσκηση 9 σελ. 80 παραστήσουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων όπως παρακάτω,



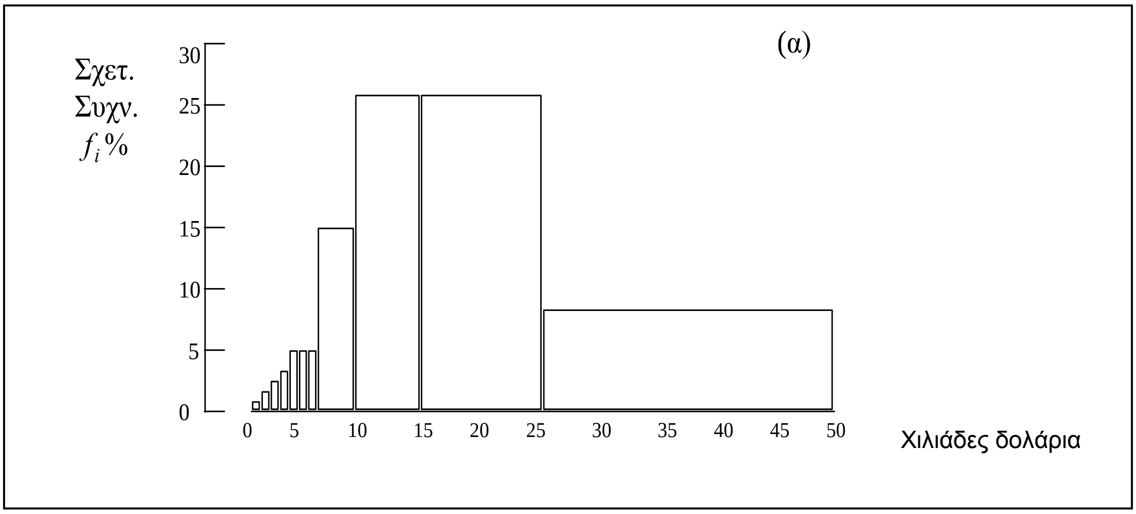
τότε η απεικόνιση της κατάστασης είναι παραπλανητική, σε βάρος του Παναθηναϊκού και υπέρ του Ολυμπιακού.

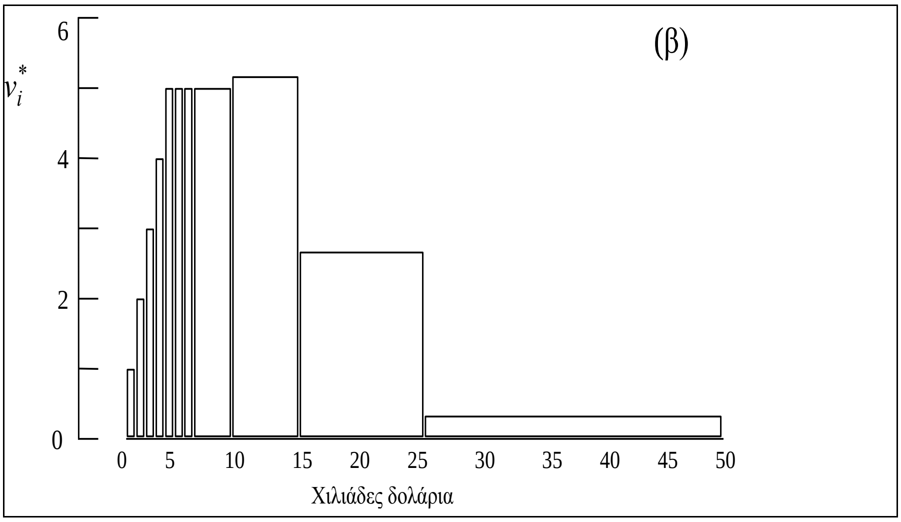
Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, επιβάλλεται να γίνεται ομαδοποίηση. Στην ομαδοποίηση το **πλήθος των κλάσεων** ορίζεται αυθαίρετα από τον ερευνητή σύμφωνα με την πείρα του. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και ο εμπειρικός τύπος του Sturges: $\kappa = 1 + 3{,}32 \cdot \log\nu$, όπου κ είναι ο αριθμός των κλάσεων και ν είναι το μέγεθος του δείγματος.

Με την ομαδοποίηση έχουμε απώλεια πληροφοριών, η οποία είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερος είναι ο αριθμός των κλάσεων. Όμως, με την ομαδοποίηση διευκολύνεται η επεξεργασία των δεδομένων και η παρουσίασή τους είναι εποπτικότερη.

Όταν έχουμε μια ομαδοποιημένη κατανομή με άνισα πλάτη, τότε στο αντίστοιχο ιστόγραμμα **τα εμβαδά και όχι τα ύψη** των ορθογωνίων είναι ίσα με τις αντίστοιχες συχνότητες των κλάσεων. Αν δεν κατασκευαστεί σύμφωνα με αυτή την αρχή το ιστόγραμμα, τότε μπορεί να παραπλανηθεί ο αναγνώστης. Για παράδειγμα, στον παρακάτω πίνακα έχουμε την κατανομή των οικογενειών στις Η.Π.Α. ως προς το ετήσιο εισόδημά τους του έτους 1973 και στο σχήμα 2 δύο διαφορετικά ιστογράμματα για την κατανομή αυτή. Στο ιστόγραμμα (α) τα ύψη των ορθογωνίων είναι ίσα με τις σχετικές συχνότητες, ενώ στο ιστόγραμμα (β) τα εμβαδά των ορθογωνίων είναι ίσα με τις αντίστοιχες συχνότητες των κλάσεων (δηλαδή το ύψος του κάθε ορθογωνίου είναι ίσο με το λόγο της σχετικής συχνότητας προς το πλάτος της αντίστοιχης κλάσης). Η εντύπωση που αποκομίζει ο αναγνώστης από το ιστόγραμμα (α) είναι ότι η οικονομική κατάσταση των οικογενειών στις Η.Π.Α. είναι πιο "ανθηρή" από ό,τι είναι στην πραγματικότητα. Σύμφωνα με το ιστόγραμμα αυτό υπάρχουν πολύ περισσότερες οικογένειες με εισόδημα άνω των 25.000$ από ό,τι κάτω των 7.000$.
(Οι Η.Π.Α. είναι βέβαια μια πλούσια χώρα, αλλά όχι τόσο πλούσια όσο δείχνει το ιστόγραμμα (α)).

Ετήσιο εισόδημα σε χιλιάδες \$	Ποσοστό ($f_i\%$) οικογενειών	Ύψος $v_i^* = \dfrac{f_i\%}{c_i}$
0 - 1	1	1
1 - 2	2	2
2 - 3	3	3
3 - 4	4	4
4 - 5	5	5
5 - 6	5	5
6 - 7	5	5
7 - 10	15	5
10 - 15	26	5,2
15 - 25	26	2,6
25 - 50	8	0,32





Σχήμα 2

Στην § **2.3** εξετάζονται τα μέτρα θέσης και διασποράς μιας κατανομής.

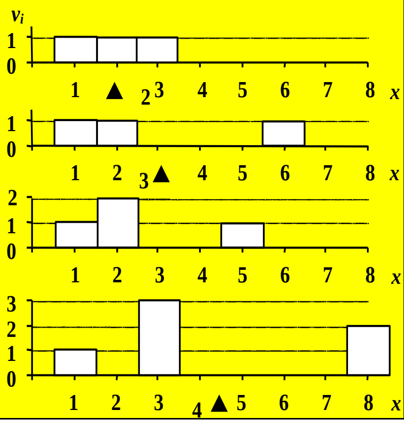
Ένας μεγάλος αριθμός δεδομένων μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να περιγραφεί με ένα μέτρο κεντρικής τάσης και με ένα μέτρο διασποράς. Οι μαθητές πρέπει να ενημερωθούν για τους περιορισμούς και τις επιπτώσεις από τη χρήση καθενός από τα μέτρα θέσης και διασποράς. Είναι επίσης σημαντικό να κατανοήσουν ότι με την αντικατάσταση των δεδομένων από ένα μέτρο θέσης έχουμε μεν μια σύντομη πληροφόρηση, αλλά συγχρόνως έχουμε και μια σημαντική απώλεια πληροφοριών. Αν, για παράδειγμα, θέλουμε να πληροφορήσουμε κάποιον για τη θερμοκρασία μιας πόλης θα ήταν κατάχρηση να του δώσουμε πλήρη κατάλογο των καθημερινών θερμοκρασιών. Δίνοντάς του όμως για συντομία μόνο τη μέση ετήσια θερμοκρασία οπωσδήποτε δεν του δίνουμε πλήρη εικόνα της μεταβολής της θερμοκρασίας στη διάρκεια του έτους.

Η **μέση τιμή** είναι ο μέσος όρος των παρατηρήσεων μιας κατανομής. Η μέση τιμή ενός πληθυσμού συμβολίζεται με $\boldsymbol{\mu}$, ενώ ενός δείγματος με $\bar{x}$. Στη στατιστική συμπερασματολογία γίνεται διάκριση μεταξύ της μέσης τιμής πληθυσμού και της μέσης τιμής δείγματος. Όμως στο βιβλίο χρησιμοποιείται μόνο η μέση τιμή δείγματος και συμβολίζεται με $\bar{x}$. Η μέση τιμή είναι το μέτρο της κεντρικής τάσης, το οποίο χρησιμοποιείται συχνότερα από τα άλλα, κυρίως επειδή έχει τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:

α.Το άθροισμα των αποκλίσεων όλων των τιμών από τη μέση τιμή είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x}) = 0$. Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική για την παραγωγή και την απλοποίηση πολλών τύπων της Στατιστικής. Την ερμηνεία αυτή της μέσης τιμής μπορούμε να τη δούμε και με το παρακάτω παράδειγμα:

Για καθένα από τα παρακάτω σύνολα δεδομένων υπολογίζουμε τη μέση τιμή τους και κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων. Στον άξονα 0*x* σημειώνουμε με "▲" τη μέση τιμή.

Παρατηρήσεις(x_i)	Μέση τιμή($\overline{X}$)	$\Sigma(x_i - \bar{x})$
1 2 3	2	0
1 2 6	3	0
1 2 2 5	2,5	0
1 3 3 3 8 8	4,333	0



Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που έχουμε συχνότητες, όταν η παρατήρηση x_i εμφανίζεται v_i φορές. Τότε ισχύει η σχέση

$$\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})v_i = 0\,,$$

η οποία σύμφωνα με όσα ξέρουμε από τη Φυσική δείχνει ότι το $\bar{x}$ είναι η θέση του **κέντρου βάρους** κ σωματιδίων με βάρη $v_1, v_2, \ldots, v_\kappa$ τοποθετημένα στις θέσεις $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$. Αυτό ακριβώς φαίνεται και στα παραπάνω ιστογράμματα συχνοτήτων, όπου η μέση τιμή παριστάνεται με "▲". Αν θεωρήσουμε δηλαδή τον άξονα 0*x* να μην έχει βάρος και τοποθετήσουμε τα βάρη v_i στις θέσεις x_i και το υποστήριγμα ▲ στη θέση $\bar{x}$, τότε θα έχουμε ισορροπία, όπως π.χ. σε μία "τραμπάλα".

β.Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από τη μέση τιμή είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από οποιαδήποτε άλλη τιμή στην κατανομή (εφαρμογή 2, σελίδα 98). Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της διασποράς και της τυπικής απόκλισης.

Στο βιβλίο αναφέρεται και ο **σταθμικός μέσος,** ο οποίος χρησιμοποιείται στην περίπτωση που οι τιμές έχουν διαφορετική αξία. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής περισσότερων ομάδων δεδομένων με διαφορετικό μέγεθος των οποίων γνωρίζουμε τις μέσες τιμές. Για παράδειγμα, αν η μέση τιμή της βαθμολογίας 80 κοριτσιών είναι 17 και η μέση τιμή της βαθμολογίας 50 αγοριών είναι 15, τότε η μέση τιμή της βαθμολογίας των 80+50=130 παιδιών είναι

$$\bar{x} = \frac{17\cdot 80 + 15\cdot 50}{80+50} = \frac{2110}{130} \approx 16.23\,.$$

Η **διάμεσος** είναι το σημείο του άξονα των δεδομένων κάτω από το οποίο βρίσκεται το πολύ το 50% των παρατηρήσεων και συγχρόνως πάνω από αυτό το πολύ το 50% των παρατηρήσεων. Όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι μεγάλος, τότε γίνεται ομαδοποίηση των δεδομένων και η διάμεσος προσδιορίζεται με τη βοήθεια του ιστογράμματος των αθροιστικών συχνοτήτων.

Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση κατανέμονται ομοιόμορφα, αποδεικνύεται (με απλή μέθοδο των τριών) ότι ο τύπος που δίνει τη διάμεσο σε ομαδοποιημένα δεδομένα είναι:

$$\delta = L_i + \frac{\frac{\nu}{2} - N_{i-1}}{\nu_i} \cdot c_i$$

i	Κλάσεις	ν_i	N_i	$F_i\%$
1	156-162	2	2	5,0
2	262-168	8	10	25,0
3	168-174	12	22	55,0
3	174-180	11	33	82,5
5	180-186	5	38	95,0
6	186-192	2	40	100,0

όπου

L_i το κατώτερο όριο της κλάσης που περιέχει τη διάμεσο

ν_i η συχνότητα της κλάσης

c_i το πλάτος της κλάσης

N_{i-1} η αθροιστική συχνότητα της **προηγούμενης** κλάσης, και

ν το πλήθος των παρατηρήσεων.

Εφαρμόζοντας, για παράδειγμα, τον τύπο της διαμέσου για τα δεδομένα του πίνακα 9 της σελίδας 73 του βιβλίου, βρίσκουμε ότι η διάμεσος βρίσκεται στην τρίτη κλάση, επειδή εδώ αντιστοιχούν αθροιστικά οι $\nu/2 = 20$ παρατηρήσεις. Συνεπώς,

$$\delta = L_i + \frac{\frac{\nu}{2} - N_{i-1}}{\nu_i} c_i = 168 + \frac{\frac{40}{2} - 10}{12} \cdot 6 = 173\text{cm},$$

όπως (περίπου) και στη γραφική μέθοδο.

Η **επικρατούσα τιμή** παρέχει σχετικά λίγες πληροφορίες για τα δεδομένα. Αν και η επικρατούσα τιμή προσδιορίζει την τιμή ή την κλάση με τη μεγαλύτερη συχνότητα, δεν προσφέρεται εύκολα για μαθηματική επεξεργασία και έτσι έχει **περιορισμένη σημασία** ως στατιστικό εργαλείο. Με τη βοήθεια του σχήματος 14 της σελίδας 91 του βιβλίου μπορούμε να βρούμε και ένα μαθηματικό τύπο για τον υπολογισμό της επικρατούσας τιμής μιας ομαδοποιημένης κατανομής με ισοπλατείς κλάσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν L_i είναι το αριστερό άκρο της επικρατούσας κλάσης, Δ_1 και Δ_2 είναι οι διαφορές των συχνοτήτων των γειτονικών κλάσεων από τη συχνότητα της επικρατούσας κλάσης, και c είναι το πλάτος των κλάσεων, τότε από τα όμοια τρίγωνα ΖΑΒ και ΖΓΔ έχουμε $\frac{M_0 - L_i}{c - (M_0 - L_i)} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ και επιλύνοντας ως προς M_0 βρίσκουμε:

$$M_0 = L_i + \frac{c\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.$$

Τα διαγράμματα, τα μέτρα θέσης και τα μέτρα διασποράς μας παρέχουν πληροφορίες για ένα σύνολο δεδομένων. Χρειαζόμαστε όμως πολλές φορές και τρόπους για την περιγραφή **ατομικών** παρατηρήσεων. Για παράδειγμα, έστω ότι σε ένα τεστ ένας εξεταζόμενος πήρε βαθμό 70. Ποια είναι η σημασία του βαθμού αυτού; Αν και από μόνος του ο βαθμός έχει κάποια αξία, θα γινόταν περισσότερο χρήσιμος αν προσδιορίζαμε τη θέση του σε σχέση με τους άλλους βαθμούς. Αν δηλαδή μπορούσαμε να απαντήσουμε σε ερωτήματα, όπως: ο συγκεκριμένος βαθμός είναι κοντά στα άκρα της κατανομής ή κοντά στο κέντρο της κατανομής; Πόσοι βαθμοί της κατανομής είναι χαμηλότεροι από αυτόν; Ποιο ποσοστό αποτελούν στην κατανομή οι βαθμοί αυτοί;

Απάντηση σε τέτοια ερωτήματα δίνονται με τη βοήθεια των εκατοστημορίων.

Ένα **εκατοστημόριο** P_k είναι μια τιμή στην κατανομή για την οποία το πολύ το k% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ (100- k)% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν. Ειδική περίπτωση των εκατοστημορίων είναι η διάμεσος $(\delta = P_{50})$, τα τεταρτημόρια $(Q_1 = P_{25}$ και $Q_3 = P_{75})$ και τα δεκατημόρια $D_1 = P_{10}, D_2 = P_{20}, ..., D_9 = P_{90}$

Εκτός από τα παραπάνω μέτρα θέσης σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως π.χ. στα οικονομικά, χρησιμοποιούνται για τη στατιστική ανάλυση ως μέτρα θέσης ο γεωμετρικός και ο αρμονικός μέσος.

Ως **γεωμετρικός μέσος** (geometric mean) ν θετικών τιμών $t_1, t_2, ..., t_\nu$ ορίζεται η νιοστή ρίζα του γινομένου των τιμών αυτών, δηλαδή

$$G = \sqrt[\nu]{t_1 \cdot t_2 \cdot ... \cdot t_\nu} \qquad \text{ή} \qquad G = \sqrt[\nu]{x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} ... x_\kappa^{\nu_\kappa}}$$

όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα.

Σε ακόμα πιο σπάνιες περιπτώσεις, κυρίως όταν μελετάμε ρυθμούς μεταβολής ή αναλογίες, χρησιμοποιείται ο **αρμονικός μέσος** (harmonic mean).

Ο αρμονικός μέσος ν θετικών τιμών $t_1, t_2, ..., t_\nu$ ορίζεται από τη σχέση

$$H = \frac{\nu}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... + \frac{1}{t_\nu}} \qquad \text{ή} \qquad H = \frac{\nu}{\frac{\nu_1}{x_1} + \frac{\nu_2}{x_2} + ... + \frac{\nu_\kappa}{x_\kappa}},$$

όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα.

Αν, για παράδειγμα, ένας μαθητής διαβάζει 5 σελίδες Μαθηματικών την ώρα, 10 σελίδες Ιστορίας την ώρα και 6 σελίδες Θρησκευτικών την ώρα τότε, ο μέσος ρυθμός διαβάσματος του μαθητή (για τα μαθήματα αυτά) είναι ο αρμονικός μέσος

$$\frac{3}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6}} \approx 6{,}4 \text{ σελίδες την ώρα.}$$

Ποιο είναι όμως το καλύτερο μέτρο θέσης μιας κατανομής; Σύμφωνα με ένα πρώτο κριτήριο η απάντηση εξαρτάται από το αν η μεταβλητή είναι ποιοτική ή ποσοτική. Αν η μεταβλητή είναι ποιοτική, τότε προσφέρεται μόνο η επικρατούσα τιμή, αν όμως η μεταβλητή είναι ποσοτική, τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν και τα τρία μέτρα θέσης. Σύμφωνα με ένα δεύτερο κριτήριο, η επιλογή του καταλληλότερου μέτρου θέσης εξαρτάται από το σκοπό για τον οποίο θα χρησιμοποιηθεί. Αν επιθυμούμε περαιτέρω στατιστική επεξεργασία, τότε η μέση τιμή προσφέρεται περισσότερο. Αν όμως ο σκοπός είναι βασικά περιγραφικός, τότε πρέπει να χρησιμοποιείται το μέτρο που περιγράφει καλύτερα τα δεδομένα. Η παρουσία ακραίων παρατηρήσεων (πολύ μικρών ή πολύ μεγάλων αναφορικά με τις άλλες παρατηρήσεις) είναι συχνά ένα από τα βασικότερα κριτήρια για την επιλογή κατάλληλου μέτρου θέσης. Η επικρατούσα τιμή και η διάμεσος μένουν γενικά ανεπηρέαστες από τις ακραίες τιμές του δείγματος. Η μέση τιμή όμως επηρεάζεται σημαντικά από τις τιμές αυτές, επομένως δεν ενδείκνυται σε τέτοιες περιπτώσεις. Έτσι, για παράδειγμα, στη διαπραγμάτευση για τους μισθούς των εργαζομένων σε μια εταιρεία, οι εργαζόμενοι θα επικαλούνται ως αντιπροσωπευτικό μισθό τη διάμεσο ή την επικρατούσα τιμή, ενώ οι εκπρόσωποι της εταιρείας τη μέση τιμή που επηρεάζεται σημαντικά από τους μισθούς των υψηλόβαθμων στελεχών της.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα πόσο διασπαρμένες είναι οι τιμές μιας κατανομής, χρησιμοποιούμε τα **μέτρα διασποράς**. Από τα μέτρα αυτά αναφέρονται στο βιβλίο το εύρος, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

Από τα μέτρα διασποράς το **εύρος** χρησιμοποιείται αρκετά συχνά σε περιπτώσεις ελέγχου ποιότητας βιομηχανικών προϊόντων, όταν εργαζόμαστε με πολλά ισομεγέθη δείγματα. Αυτό οφείλεται στον εύκολο υπολογισμό του και στην εύκολη ερμηνεία του. Το εύρος όμως έχει το μειονέκτημα να εξαρτάται μόνο από τις δύο ακραίες τιμές και έχει την τάση να αυξάνεται, καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει. Αυτό έχει ως συνέπεια να μην είναι συγκρίσιμα ως προς το εύρος δύο δείγματα διαφορετικού μεγέθους.

Η **διακύμανση** ενός πληθυσμού μεγέθους *N* συμβολίζεται με $\boldsymbol{\sigma^2}$ και ο τύπος της είναι

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(t_i - \mu)^2}{N} \qquad (1),$$

όπου $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i$ η μέση τιμή του πληθυσμού, ενώ η διακύμανση ενός δείγματος μεγέθους *ν* συμβολίζεται με s^{*2} και ο τύπος της είναι

$$s^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2}{\nu - 1} \qquad (2).$$

Στατιστικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στις διάφορες επιστήμες συνήθως προσδιορίζουν τη διακύμανση s^{*2} ενός δείγματος, η οποία στη συνέχεια χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της διακύμανσης $\boldsymbol{\sigma^2}$ του πληθυσμού. Η δειγματική διακύμανση που προσδιορίζεται με τον τύπο (2) αποδεικνύεται ότι είναι μια *αμερόληπτη εκτιμήτρια*. Αν πάρουμε δηλαδή όλα τα δυνατά δείγματα μεγέθους *ν* και υπολογίσουμε τις διασπορές s^{*2} από τη σχέση (2), τότε η μέση τιμή τους θα ισούται με την πληθυσμιακή διασπορά σ^2. Αντίθετα, η δειγματική διακύμανση, όπως ορίζεται από τη σχέση $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2}{\nu}$, τείνει να υποεκτιμά τη πληθυσμιακή διακύμανση σ^2. Ωστόσο, στο βιβλίο για διδακτικούς λόγους χρησιμοποιούμε για τη δειγματική διακύμανση τον τύπο $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2}{\nu}$, αφού δεν πρόκειται να ασχοληθούμε με στατιστική συμπερασματολογία.

Η **τυπική απόκλιση** είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Το μέτρο αυτό διασποράς ικανοποιεί την απαίτηση να εκφράζεται στην ίδια μονάδα μέτρησης με τις παρατηρήσεις.

Στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις είναι μεγάλοι αριθμοί, μπορούμε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας την εφαρμογή 3 (σελίδα 99 του βιβλίου), σύμφωνα με την οποία αν $y = ax + \beta$, τότε $\boldsymbol{\bar{y} = a\bar{x} + \beta}$ και $\boldsymbol{s_y = |a| \cdot s_x}$.

Για την ερμηνεία της τυπικής απόκλισης ως μέτρου διασποράς, ας υποθέσουμε ότι ο μέσος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας Α είναι $\bar{x}_A = 250.000$ δρχ. με τυπική απόκλιση $s_A = 42.000$ δρχ. Μια ερμηνεία της μεταβλητότητας των απολαβών των εργαζομένων έγκειται στον καθορισμό του ποσοστού των εργαζομένων που αναμένεται να βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, ή με δύο τυπικές αποκλίσεις στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ κτλ. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, τότε έχουμε την ερμηνεία του σχήματος 15, σελ. 95. Αντίθετα, για οποιοδήποτε σύνολο παρατηρήσεων, ανεξάρτητα από την κατανομή που έχουμε, εφαρμόζεται το θεώρημα του Chebyshev, το οποίο λέει ότι “το ποσοστό των παρατηρήσεων που περιλαμβάνονται στο διάστημα $(\bar{x} - \kappa s, \bar{x} + \kappa s)$, $\kappa \geq 1$, είναι τουλάχιστον $1-\frac{1}{\kappa^2}$". Συνεπώς, στο διάστημα $(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s)$ έχουμε τουλάχιστον το 75% των παρατηρήσεων, ενώ στο διάστημα $(\bar{x}-3s,\ \bar{x}+3s)$ έχουμε τουλάχιστον το 89% των παρατηρήσεων. Επομένως, για το παραπάνω παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι ο μισθός των υπαλλήλων ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε αναμένεται το:

- 68% των υπαλλήλων να έχουν μισθό στο διάστημα (208.000, 292.000)
- 95% των υπαλλήλων να έχουν μισθό στο διάστημα (166.000, 334.000)
- 99,7% των υπαλλήλων να έχουν μισθό στο διάστημα (124.000, 376.000),

ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά, όταν δεν υποθέτουμε κανονική κατανομή, γίνονται τουλάχιστον 0%, 75% και 89%.

Μερικές φορές σε στατιστικούς υπολογισμούς είναι αναγκαίο όχι μόνο να υπολογίσουμε απλώς τις τυπικές αποκλίσεις, αλλά να συγκρίνουμε μεταξύ τους τα μεγέθη των τυπικών αποκλίσεων σε διαφορετικές στατιστικές συλλογές. Δε φτάνουμε όμως στο σκοπό μας με το να παραλληλίσουμε μεταξύ τους τις τυπικές αποκλίσεις. Αυτό θα μας έδινε στην πλειοψηφία των περιπτώσεων μια εσφαλμένη εικόνα.

Ας υποθέσουμε ότι ο μέσος μισθός $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση *s* των υπαλλήλων δύο εταιρειών *Α* και *Β* δίνονται στον παρακάτω πίνακα για 3 διαφορετικές περιπτώσεις:

	Εταιρεία Α	Εταιρεία Β
Περίπτωση 1	$\bar{x}_A = 900€$ $s_A = 150€$	$\bar{x}_B = 900€$ $s_B = 200€$
Περίπτωση 2	$\bar{x}_A = 900€$ $s_A = 150€$	$\bar{x}_B = 3000€$ $s_B = 250€$
Περίπτωση 3	$\bar{x}_A = 900€$ $s_A = 150€$	$\bar{x}_B = 2000\$$ $s_B = 420\$$

Στην περίπτωση 1 έχουμε την ίδια μέση τιμή, οπότε η σύγκριση της μεταβλητότητας μπορεί να γίνει αμέσως, συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι η μεταβλητότητα των μισθών στην εταιρεία Β είναι μεγαλύτερη από την μεταβλητότητα των μισθών στην εταιρεία Α. Δηλαδή οι εργαζόμενοι στην εταιρεία Α παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια στις μηνιαίες αποδοχές τους από ό,τι στην εταιρεία Β. Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση δεν μπορούμε να πούμε ότι έχουμε μεγαλύτερη μεταβλητότητα στην εταιρεία Β από ό,τι στην Α. Η τυπική απόκλιση $s_A = 150€$ έχει υπολογιστεί θεωρώντας τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή $\bar{x}_A = 900€$, ενώ η $s_B = 250€$ υπολογίστηκε θεωρώντας τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή $\bar{x}_B = 3000€$ Ανάλογη είναι και η τρίτη περίπτωση, όπου έχουμε διαφορετικές μονάδες μέτρησης.

Στις δύο αυτές περιπτώσεις η μεταβλητότητα των δεδομένων μπορεί να συγκριθεί, αφού πρώτα εκφράσουμε τις σχετικές ποσότητες σε μια κοινή βάση. Γι 'αυτό υπάρχει ανάγκη ορισμού μέτρων σχετικής μεταβλητότητας, τα οποία να συνδυάζουν μέτρα θέσης με μέτρα διασποράς. Το πιο γνωστό μέτρο σχετικής μεταβλητότητας είναι ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας, ο οποίος ορίζεται από τον τύπο $cv = \frac{s}{\bar{x}}$ και συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό.

Σύγκριση μέσης τιμής, διαμέσου και επικρατούσας τιμής

Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Μέση τιμή	
• Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές. • Είναι μοναδική για κάθε σύνολο δεδομένων. • Είναι εύκολα κατανοητή. • Ο υπολογισμός της είναι σχετικά εύκολος. • Έχει μεγάλη εφαρμογή για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.	• Επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές. • Μπορεί να μην αντιστοιχεί σε δυνατή τιμή της μεταβλητής. Όταν η Χ είναι διακριτή, με ακέραιες τιμές, τότε η μέση τιμή μπορεί να μην είναι ακέραιος. • Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα. • Είναι δύσκολος ο υπολογισμός της σε ομαδοποιημένα δεδομένα με ανοικτές τις ακραίες κλάσεις.
Διάμεσος	
• Είναι εύκολα κατανοητή. • Δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές. • Υπολογίζεται και στην περίπτωση που οι ακραίες κλάσεις είναι ανοικτές. • Ο υπολογισμός της είναι απλός. • Είναι μοναδική σε κάθε σύνολο δεδομένων.	• Δε χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές για τον υπολογισμό της. • Είναι δύσκολη η εφαρμογή της για περαιτέρω στατιστική ανάλυση. • Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα. • Για τον υπολογισμό της μπορεί να χρειαστεί παρεμβολή.
Επικρατούσα τιμή	
• Υπολογίζεται εύκολα, όταν δεν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα. • Είναι εύκολα κατανοητή. • Υπολογίζεται και από ελλιπή δεδομένα. • Δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές. • Εφαρμόζεται και σε ποιοτικά δεδομένα.	• Δε χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές. • Δε χρησιμοποιείται εύκολα για περαιτέρω στατιστική ανάλυση. • Δεν ορίζεται πάντα μονοσήμαντα. Μπορούμε να έχουμε πολλές κορυφές ή και καθόλου.

Σύγκριση μέτρων διασποράς

Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Εύρος	
• Είναι πολύ απλό στον υπολογισμό. • Χρησιμοποιείται αρκετά στον έλεγχο ποιότητας. • Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης.	• Δε θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς, επειδή βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις. • Δε χρησιμοποιείται για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.
Διασπορά και τυπική απόκλιση	
• Λαμβάνονται υπόψη για τον	• Το κυριότερο μειονέκτημα της

υπολογισμό τους όλες οι παρατηρήσεις.

- Έχουν μεγάλη εφαρμογή στη στατιστική συμπερασματολογία.
- Σε κανονικούς πληθυσμούς το 68%, 95%, 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκονται στα διαστήματα $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ και $\bar{x} \pm 3s$ αντίστοιχα.

διασποράς είναι ότι δεν εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με το χαρακτηριστικό. Το μειονέκτημα αυτό παύει να υπάρχει με τη χρησιμοποίηση της τυπικής απόκλισης

- Απαιτούνται περισσότερες αλγεβρικές πράξεις για τον υπολογισμό τους παρά στα άλλα μέτρα.

Συντελεστής μεταβολής

- Είναι καθαρός αριθμός.
- Χρησιμοποιείται ως μέτρο σύγκρισης της μεταβλητότητας, όταν έχουμε ίδιες ή και διαφορετικές μονάδες μέτρησης.
- Χρησιμοποιείται ως μέτρο ομοιογένειας ενός πληθυσμού.

- Δεν ενδείκνυται στην περίπτωση που η μέση τιμή είναι κοντά στο μηδέν.

Στην §**2.4** εξετάζεται η απλή **γραμμική παλινδρόμηση.** Αν εξετάζουμε έναν πληθυσμό συγχρόνως ως προς δύο μεταβλητές Χ και Υ και (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),..., (x_ν, y_ν) είναι τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών, τότε μπορούμε να εξετάσουμε το είδος της εξάρτησης των δύο μεταβλητών με την ακόλουθη μέθοδο.

Παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη (x_i, y_i), i= 1,2, 3,...ν και έτσι έχουμε το **διάγραμμα διασποράς** (νέφος σημείων). Στη συνέχεια αναζητούμε μια συνάρτηση, της οποίας η καμπύλη διέρχεται “όσο γίνεται πιο κοντά” από τα σημεία (x_i, y_i), $i = 1,2,3\ldots\nu$. Στην περίπτωση που το διάγραμμα διασποράς μας οδηγεί στην υπόθεση ότι υπάρχει μια **γραμμική εξάρτηση** (γραμμική παλινδρόμηση), προσδιορίζουμε την ευθεία παλινδρόμησης $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$, από τα σημεία (x_i, y_i), $i = 1,2,3\ldots\nu$ απαιτώντας το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2$ να είναι ελάχιστο (**αρχή των ελαχίστων τετραγώνων**).

Οι τύποι (5) και (6) της σελίδας 110 του βιβλίου, με τους οποίους προσδιορίζουμε τις εκτιμήτριες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ των συντελεστών α και β αντιστοίχως, βρίσκονται ως εξής:

Το άθροισμα των τετραγώνων ***S*** = $\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2$ γίνεται ελάχιστο, όταν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ και $\frac{\partial S}{\partial \beta}$ είναι και οι δύο μηδέν. Έχουμε

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -2\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - \alpha - \beta x_i) \quad (1)$$

και $$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2\sum_{i=1}^{\nu}x_i(y_i - \alpha - \beta x_i) \quad (2).$$

Εξισώνοντας τις (1) και (2) με το μηδέν, βρίσκουμε τις ακόλουθες εξισώσεις, οι οποίες λέγονται *κανονικές εξισώσεις* :

$$\beta\sum x_i + \alpha \cdot \nu = \sum y_i$$

$$\beta\sum x_i^2 + \alpha\sum x_i = \sum x_i y_i$$

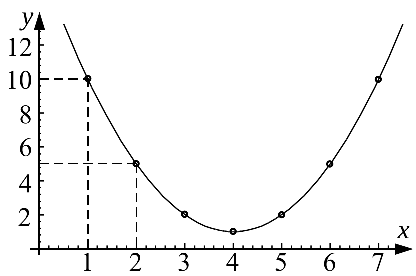
Λύνοντας το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων βρίσκουμε τους ζητούμενους τύπους.

Με τη βοήθεια των εφαρμογών της §**2.4** να επισημανθεί στους μαθητές ότι:

- Οι προβλέψεις που μπορούμε να κάνουμε για την εξαρτημένη μεταβλητή Y από τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής X μέσω της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ είναι δυνατές μόνο για τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, οι οποίες βρίσκονται στο διάστημα που έχει γίνει η μελέτη ή πολύ κοντά στα άκρα του διαστήματος αυτού.
- Η εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ της εξαρτημένης μεταβλητής *Y* πάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητή *X*, δε μας επιτρέπει να κάνουμε προβλέψεις για τις τιμές της *X* , όταν δίνονται οι τιμές της *Y*. Για να είναι αυτό δυνατόν, πρέπει να προσδιορίσουμε εξαρχής την ευθεία παλινδρόμησης της X πάνω στην *Y*, $\hat{x}=\hat{\gamma}+\hat{\delta}y$, η οποία γενικά είναι διαφορετική από την $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$. Και στις δύο όμως περιπτώσεις οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $(\bar{x},\ \bar{y})$.

Το διάγραμμα διασποράς μάς δίνει μια ένδειξη του κατά πόσον υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής *Y* και μιας άλλης *X* που λαμβάνεται ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Εάν τα σημεία $(x_i,\ y_i)$ τείνουν να βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία, τότε η σχέση μεταξύ των *X* και *Y* είναι γραμμική και περιγράφεται από την εξίσωση της ευθείας $y=\alpha+\beta x$. Αν το $\beta=0$, τότε δεν υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών. Αυτό όμως δε σημαίνει απαραίτητα ότι δεν υπάρχει κάποια άλλη σχέση μεταξύ των *X* και *Y*. Αν έχουμε, για παράδειγμα, τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα, παρατηρούμε ότι τα σημεία δε βρίσκονται γύρω από ευθεία γραμμή. Αυτό διαπιστώνεται από το ότι και η παράμετρος *β* εκτιμώμενη με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων βρίσκεται ίση με μηδέν. Παρ΄ όλα αυτά όμως η εξίσωση $y=(x-4)^2+1$ (που παριστάνει μια παραβολή) περιγράφει τέλεια τη σχέση μεταξύ των *X* και *Y*.

X	Y
1	10
2	5
3	2
4	1
5	2
6	5
7	10



Όταν διαπιστώνεται από το διάγραμμα διασποράς ή μας δίνεται ότι η σχέση μεταξύ των *X* και *Y* δεν είναι γραμμική, μπορούμε σε αρκετές περιπτώσεις με κατάλληλο μετασχηματισμό να την κάνουμε γραμμική και να εφαρμόσουμε τα ήδη γνωστά. Για παράδειγμα, όταν η σχέση είναι της μορφής:

$$y=\alpha e^{\beta x}$$

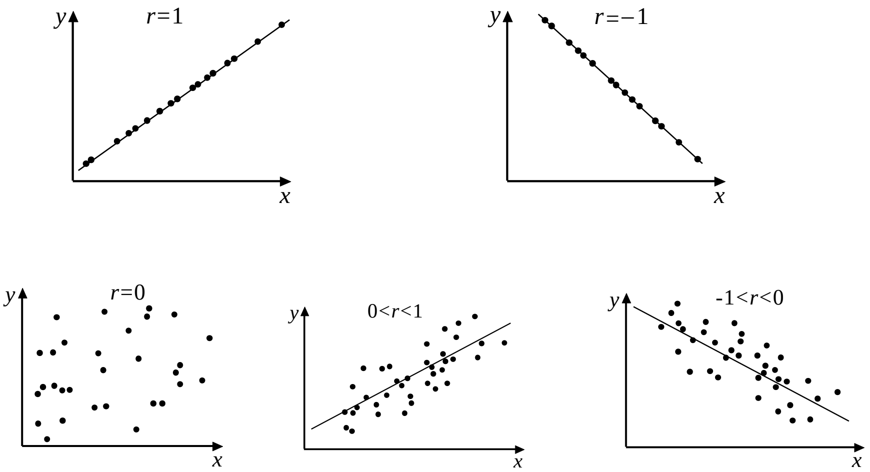
παίρνοντας λογαρίθμους βρίσκουμε

$$\ln y=\ln\alpha+\beta x$$

και θέτοντας $y^*=\ln y$, $\alpha^*=\ln\alpha$, $\beta^*=\beta$ η αρχική σχέση μετασχηματίζεται στη γραμμική $y^*=\alpha^*+\beta^* x$.

Το κεφάλαιο τελειώνει με την **§2.5,** η οποία αναφέρεται στο συντελεστή r της γραμμικής συσχέτισης. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης μας πληροφορεί για το είδος της γραμμικής συσχέτισης (θετική, αρνητική ή μηδέν), αλλά και για το πόσο ισχυρή είναι η συσχέτιση αυτή. Με άλλα λόγια μας πληροφορεί για το αν αύξηση της μιας μεταβλητής αντιστοιχεί σε αύξηση ή μείωση της άλλης μεταβλητής, αλλά και για το πόσο διασπαρμένα είναι τα σημεία ενός “νέφους” ως προς την αντίστοιχη ευθεία παλινδρόμησης.

Έτσι, ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης έχει το ίδιο πρόσημο με το συντελεστή $\hat{\beta}$ της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$, ενώ η απόλυτη τιμή του εξαρτάται από το πλάτος της “έλλειψης” που περικλείει το νέφος των σημείων.



Το γεγονός ότι για το συντελεστή συσχέτισης

$$r=\frac{\sum (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum (y_i-\bar{y})^2}}$$

ισχύει $-1\le r\le 1$, αποδεικνύεται ως εξής:

Για κάθε πραγματική παράμετρο λ έχουμε διαδοχικά

$$\sum \left[(x_i-\bar{x})+\lambda (y_i-\bar{y})\right]^2 \geq 0$$

$$\sum \left[(x_i-\bar{x})^2+\lambda^2 (y_i-\bar{y})^2+2\lambda (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right]\geq 0$$

$$\sum (x_i-\bar{x})^2+\lambda^2\sum (y_i-\bar{y})^2+2\lambda\sum (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\geq 0$$

$$\lambda^2\cdot\sum (y_i-\bar{y})^2+\lambda\cdot 2\sum (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})+\sum (x_i-\bar{x})^2 \geq 0.$$

Επειδή η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $\lambda\in$R, πρέπει η διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma\le 0$:

$$4\cdot\left[\sum (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right]^2\le 4\cdot\sum (y_i-\bar{y})^2\cdot\sum (x_i-\bar{x})^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\sum (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum (y_i-\bar{y})^2}\sqrt{\sum (x_i-\bar{x})^2}}\right)^2\le 1 \Leftrightarrow$$

$$r^2\le 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$|r|\le 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$-1\le r\le 1.$$

Συσχέτιση δε σημαίνει αιτιότητα

Επειδή το *r* παριστά μια εκτιμήτρια της αντίστοιχης παραμέτρου του πληθυσμού, θα πρέπει να ερμηνεύεται με τον τρόπο που αναφέρθηκε μόνο όταν στηρίζεται σε ένα τυχαίο δείγμα του πληθυσμού. Επομένως, ένας συντελεστής συσχέτισης δεν έχει μεγάλη χρησιμότητα σε πειραματικά δεδομένα, όπου οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι σταθερές και επιλέγονται από τον ερευνητή.

Αιτιολογικά συμπεράσματα δεν μπορούν να ληφθούν (εκτός ελάχιστων εξαιρέσεων) χωρίς πειραματισμό. Συνεπώς, όταν δύο μεταβλητές *X* και *Y* βρίσκονται συσχετισμένες στη φύση, αυτό σημαίνει μόνο ότι οι μεταβλητές αυτές συνδέονται με κάποια σχέση. Δε συνεπάγεται μια **αιτιολογική σχέση**. Υπάρχει περίπτωση η αλλαγή της μεταβλητής *X* να προκαλεί άμεσα αλλαγή της *Y*. Αλλά πολύ συχνά οι αλλαγές των δύο μεταβλητών *X* και *Y* οφείλονται σε κάποιες άλλες μεταβλητές ή σε κάποιους αστάθμητους παράγοντες.

Για παράδειγμα στην Αμερική, πριν εισαχθεί το εμβόλιο Salk κατά της πολιομυελίτιδας, οι ερευνητές εξέταζαν αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στην εμφάνιση της πολιομυελίτιδας και του αριθμού των πωληθέντων αναψυκτικών. Για κάθε εβδομάδα του έτους κατέγραφαν σ’ ένα πίνακα τον αριθμό των αναψυκτικών που καταναλώθηκαν τη συγκεκριμένη εβδομάδα και τον αριθμό των νέων περιστατικών πολιομυελίτιδας που είχαν αναφερθεί. Τα δεδομένα αυτά εμφάνιζαν ισχυρή θετική συσχέτιση ανάμεσα στον αριθμό των περιστατικών της πολιομυελίτιδας (μεταβλητή *Y*). και τον αριθμό των πωληθέντων αναψυκτικών (μεταβλητή *X*). Τις εβδομάδες που είχαν καταναλωθεί περισσότερα αναψυκτικά, είχαν εκδηλωθεί περισσότερα νέα περιστατικά πολιομυελίτιδας. Όταν η κατανάλωση των αναψυκτικών ήταν μειωμένη, υπήρχαν λιγότερα νέα περιστατικά. Προκαλούν λοιπόν τα αναψυκτικά εμφάνιση πολιομυελίτιδας; Αν ήταν έτσι με την απαγόρευση της πώλησης τους θα έπρεπε να μειώνεται και η εμφάνιση της νόσου. Ολοφάνερα η απάντηση είναι αρνητική. Η επιδημία της πολιομυελίτιδας παρουσιάζει έξαρση το καλοκαίρι, που συμβαίνει να έχουμε και αύξηση της κατανάλωσης των αναψυκτικών. Έτσι εντοπίστηκε ένας τρίτος παράγοντας, η εποχή του έτους που είναι καθοριστικός και για τις δύο μεταβλητές *Y* και *X*. Ο συντελεστής συσχέτισης των *Y* και *X* απλώς επηρεαζόταν από αυτόν τον παράγοντα, ο οποίος επηρέαζε ταυτόχρονα τόσο τη μεταβλητή *Y* (αριθμός περιστατικών της νόσου) όσο και τη μεταβλητή *X* (αριθμός των καταναλωθέντων αναψυκτικών).

Γενικά, με τη διδασκαλία αυτού του κεφαλαίου επιδιώκεται οι μαθητές :

- Να κατακτήσουν το βασικό λεξιλόγιο της Στατιστικής, με το οποίο θα είναι ικανοί να κατανοούν βασικά θέματα της Στατιστικής, αλλά και να διατυπώνουν τις απόψεις τους για τα θέματα αυτά.
- Να μπορούν να διαβάζουν με ορθό τρόπο, αλλά και να κατασκευάζουν οι ίδιοι στατιστικά διαγράμματα.
- Να μπορούν να βρίσκουν τα μέτρα θέσης και διασποράς μιας κατανομής, αλλά και να γνωρίζουν την αξία και τα όρια των μέτρων αυτών.
- Να μπορούν να διαπιστώνουν το βαθμό συσχέτισης δύο μεταβλητών και να προβλέπουν τις τιμές της μιας από τις τιμές της άλλης, προσδιορίζοντας την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Από το κεφάλαιο 2 **δε θα διδαχτούν:**

  α) Οι κλάσεις άνισου πλάτους (σελ. 74)
  β) Τα εκατοστημόρια (σελ. 89) και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (σελ. 92)
  γ) Η επικρατούσα τιμή (σελ. 90,91)
  δ) Η γραμμική παλινδρόμηση, §2.4
  ε) Η γραμμική συσχέτιση, §2.5
  στ) Η άσκηση 4 της σελ. 81.

- Κατά την εξέταση ασκήσεων που αναφέρονται σε ομαδοποίηση παρατηρήσεων, οι κλάσεις θα δίδονται υποχρεωτικά.
- Κατά τη διδασκαλία του ιστογράμματος συχνοτήτων **να τονιστεί ιδιαιτέρως** ότι οι παρατηρήσεις στις κλάσεις κατανέμονται **ομοιόμορφα.** Επομένως, αν σε μια κλάση πλάτους *c* αντιστοιχούν ν_i παρατηρήσεις, τότε σε ένα υποδιάστημα αυτής πλάτους ***d*** αντιστοιχούν $\nu_i \dfrac{d}{c}$ παρατηρήσεις. Έτσι για παράδειγμα στην άσκηση 5 της σελ. 103 οι πωλητές που έκαναν πωλήσεις από 5 χιλιάδες ευρώ μέχρι 6 χιλιάδες ευρώ είναι $14 \cdot \frac{1}{2} = 7$.
- Κατά τη διδασκαλία της διακύμανσης να δίνονται οι τύποι 2 και 4 των σελίδων 93 & 94 αντιστοίχως.

Κεφάλαιο 3. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 19 διδακτικές ώρες.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων προσφέρει τις μεθόδους με τις οποίες προσδιορίζουμε ένα μέτρο της βεβαιότητας, με την οποία αναμένεται να πραγματοποιηθεί ή να μην πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο. Η κατοχή επομένως των βασικών στοιχείων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων θα καταστήσει τους αυριανούς πολίτες ικανούς να συλλογίζονται με ψυχραιμία, να κρίνουν και να εκτιμούν με αντικειμενικότητα τα γεγονότα, αφού θα έχουν κατανοήσει ότι υπάρχουν τρόποι για να βρούμε αν κάποια από αυτά είναι περισσότερο πιθανά από κάποια άλλα.

Στην §**3.1** εξηγούνται οι έννοιες του **πειράματος τύχης**, του **δειγματικού χώρου** και του **ενδεχομένου.** Για τα ενδεχόμενα, αφού είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω, ισχύει η γνωστή από την Α΄ Λυκείου άλγεβρα των συνόλων. Πρέπει επομένως οι μαθητές να εξοικειωθούν με τις πράξεις μεταξύ των συνόλων, τις οποίες και να ερμηνεύουν ως αντίστοιχες πράξεις με ενδεχόμενα. Πρέπει επίσης οι μαθητές να κατανοήσουν την αντιστοιχία ανάμεσα στις διάφορες σχέσεις των ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη διατύπωση των ίδιων σχέσεων στη γλώσσα των συνόλων. Για το ξεπέρασμα των δυσκολιών που παρουσιάζονται στον προσδιορισμό του δειγματικού χώρου και των ενδεχομένων πρέπει οι διδάσκοντες για την εποπτική παρουσίασή τους να χρησιμοποιούν τα δεντροδιαγράμματα, τους πίνακες διπλής εισόδου, τα διαγράμματα Venn κτλ., ώστε να οδηγούν τους μαθητές στο να οργανώνουν τη σκέψη τους με συστηματικό και παραστατικό τρόπο.

Για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι στη ρίψη δύο νομισμάτων τα αποτελέσματα *ΚΓ* και *ΓΚ* είναι διαφορετικά, να εξεταστεί για παράδειγμα το πείραμα στην περίπτωση της ρίψης ενός δεκάρικου και ενός εικοσάρικου.

Τέλος, επειδή σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό των πιθανοτήτων παίζει ο διαμερισμός ενός συνόλου σε ανά δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα, πρέπει να κατανοήσουν οι μαθητές τις σχέσεις:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B),$$

$$B = (B - A) \cup (B \cap A) = (B \cap A') \cup (B \cap A) \text{ και}$$

$$A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (B \cap A').$$

Στην §**3.2** εισάγεται η έννοια της πιθανότητας, η οποία είναι και η βασικότερη έννοια του κεφαλαίου. Επειδή η έννοια αυτή διαμορφώνεται με βάση την έννοια της σχετικής συχνότητας, κρίνεται σκόπιμο να γίνει αναφορά και στην αντίστοιχη έννοια στο κεφάλαιο της Στατιστικής (σελ. 65 του βιβλίου).

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του. Επομένως, αν *Α* είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν το A θα πραγματοποιηθεί ή όχι. Γι' αυτό είναι χρήσιμο να συνδυάσουμε με κάθε ενδεχόμενο A έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της "προσδοκίας" με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίηση του A. Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του A. Πώς θα γίνει όμως η "εκχώρηση" των πιθανοτήτων στα διάφορα ενδεχόμενα του πειράματος τύχης; Πώς δηλαδή θα κατασκευάσουμε μια κλίμακα πιθανότητας, με τη βοήθεια της οποίας σε κάθε ενδεχόμενο θα εκχωρούμε την αντίστοιχη πιθανότητα, όπως ακριβώς κάνουμε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας κατασκευάζοντας, για παράδειγμα, τη θερμομετρική κλίμακα Κελσίου;

Συμφωνούμε ότι στην κλίμακα της πιθανότητας στο αδύνατο ενδεχόμενο θα αντιστοιχεί ο αριθμός 0, ενώ στο βέβαιο ενδεχόμενο ο αριθμός 1 (όπως και στην κοινή γλώσσα λέμε για το αδύνατο ενδεχόμενο ότι έχει πιθανότητα 0%, ενώ το βέβαιο 100%). Είναι λογικό να δεχτούμε ότι η πιθανότητα κάθε άλλου ενδεχομένου θα βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και στο 1. Πώς θα γίνει όμως η εκχώρηση της πιθανότητας σε ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο; Σε ένα πείραμα που υπάρχει το στοιχείο της "συμμετρίας" είναι λογικό να υποθέσουμε ότι τα απλά ενδεχόμενα του πειράματος είναι ισοπίθανα, οπότε η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου A με κ στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{\kappa}{\nu}$ και το όριο αυτό το ορίζουμε και ως πιθανότητα του A, δηλαδή $P(A)=\frac{\kappa}{\nu}$, που αποτελεί και τον **κλασικό ορισμό** της πιθανότητας. Η $P(A)$ που ορίζεται με αυτό τον τρόπο ικανοποιεί τις απαιτήσεις μιας κλίμακας πιθανότητας, αφού ισχύουν:

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(\Omega)=1$
- $P(\varnothing)=0$.

Πώς όμως γίνεται η εκχώρηση των πιθανοτήτων, όταν ο δειγματικός χώρος αποτελείται από μη ισοπίθανα αποτελέσματα ή έχει άπειρο πλήθος στοιχείων. Στις περιπτώσεις αυτές η Θεωρία των Πιθανοτήτων χρησιμοποιεί τον ορισμό που αναφέρεται στην αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας των Πιθανοτήτων, η οποία έγινε από τον A.N. Kolmogoroff. Σύμφωνα με τη θεμελίωση αυτή, αν Ω είναι ένας δειγματικός χώρος και $\mathcal{D}$ η αντίστοιχη κλάση των ενδεχομένων, τότε μέτρο πιθανότητας ονομάζεται κάθε συνάρτηση

$$P : \mathcal{D} \to R$$

για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες:

- $0 \le P(A) \le 1$, για κάθε $A \in \mathcal{D}$
- $P(\Omega)=1$
- $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$, αν $A \cap B = \varnothing$.

Η θεωρία του Kolmogoroff έχει το πλεονέκτημα να είναι φυσική, απλή και να ικανοποιεί τις σύγχρονες απαιτήσεις της αυστηρότητας. Συνδέει τη Θεωρία των Πιθανοτήτων με τη Θεωρία του Μέτρου και της Ολοκλήρωσης και έτσι εφοδιάζεται με ισχυρά εργαλεία και τεχνικές από άλλους αναπτυγμένους κλάδους των Μαθηματικών. Πέραν τούτου η αυστηρή θεμελίωση ήταν αυτή που επέτρεψε την αλματώδη ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων.

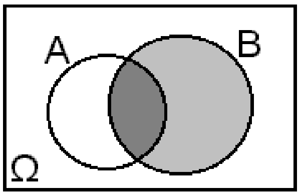
Όμως, στο διδακτικό βιβλίο υιοθετήθηκε για διδακτικούς λόγους ο απλούστερος αξιωματικός ορισμός που αναφέρεται στη σελίδα 149, άμεση συνέπεια του οποίου είναι και οι παραπάνω ιδιότητες, οι οποίες αναφέρονται στον ορισμό κατά Kolmogoroff.

Η παράγραφος 3.2 ολοκληρώνεται με τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων, οι οποίοι αποδεικνύονται για δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Είναι σκόπιμο να δοθεί έμφαση στην εποπτική ερμηνεία των κανόνων αυτών.

Η **§3.3** αναφέρεται στη Συνδυαστική, όπου παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλημάτων απαρίθμησης. Πρέπει να γίνει σαφές στους μαθητές ότι τα προβλήματα αυτά λύνονται κυρίως με τη βοήθεια της **βασικής αρχής απαρίθμησης**, η οποία και αποτελεί το κυρίαρχο "εργαλείο" για την απαρίθμηση. Οι τύποι διατάξεων απλώς συντομεύουν τη λύση ορισμένων προβλημάτων.

Οι βασικές σχέσεις των συνδυασμών $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-\kappa}$ (σελίδα 164, άσκηση 5, Α΄ Ομάδας) και $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa-1}$ (σελίδα 174 άσκηση 3, Γενικές ασκήσεις) αποδεικνύονται στο τεύχος των λύσεων αλγεβρικά. Είναι χρήσιμο όμως να εξηγηθεί στους μαθητές ότι η πρώτη από αυτές προκύπτει, αν παρατηρήσουμε ότι σε κάθε συνδυασμό με *κ* στοιχεία αντιστοιχεί ένας συνδυασμός με $\nu-\kappa$ στοιχεία, ενώ η δεύτερη, αν παρατηρήσουμε ότι το σύνολο των συνδυασμών με *κ* στοιχεία αποτελείται από τους συνδυασμούς που περιλαμβάνουν ένα ορισμένο στοιχείο, οι οποίοι είναι σε πλήθος $\binom{\nu-1}{\kappa-1}$, και από τους συνδυασμούς που δεν περιλαμβάνουν το στοιχείο αυτό, οι οποίοι είναι σε πλήθος $\binom{\nu-1}{\kappa}$.

Στην **§3.4** εισάγονται οι έννοιες της δεσμευμένης πιθανότητας και των ανεξάρτητων ενδεχομένων.



Κατά τη διδασκαλία της ενότητας αυτής θα πρέπει να δειχτεί εποπτικά πώς μεταβάλλεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος, όταν είναι δεδομένο ότι έχει πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο. Συγκεκριμένα, αν είναι γνωστό για παράδειγμα ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο $B\neq\varnothing$, τότε ο δειγματικός χώρος *Ω* περιορίζεται στο *Β* και επομένως οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το *Α* θα είναι τα στοιχεία του $A\cap B$.

Επομένως, στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος *Ω* αποτελείται από ισοπίθανα απλά αποτελέσματα έχουμε

$$P(A\,|\,B)=\frac{N(A\cap B)}{N(B)}=\frac{N(A\cap B)/N(\Omega)}{N(B)/N(\Omega)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα με δεδομένο το $B\neq\varnothing$, ικανοποιεί τα αξιώματα του μέτρου πιθανότητας.

Πράγματι:

- Για κάθε ενδεχόμενο *Α* έχουμε $A\cap B\subseteq B$ και επομένως $0\le P(A\cap B)\le P(B)$, οπότε $0\le\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\le 1$, που σημαίνει ότι $\mathbf{0\le P(A\,|\,B)\le 1}$.
- Για το βέβαιο ενδεχόμενο *Ω* έχουμε $\Omega\cap B=B$, και επομένως
  $$P(\Omega\,|\,B)=\frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1,$$ δηλαδή $\mathbf{P(\Omega\,|\,B)=1}$.
- Αν $A_1\cap A_2=\varnothing$, τότε $(A_1\cap B)\cap(A_2\cap B)=\varnothing$,
  και επειδή
  $$(A_1\cup A_2)\cap B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\ ,$$
  έχουμε
  $$P(A_1\cup A_2\,|\,B)=\frac{P((A_1\cup A_2)\cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} \quad ,$$

$$= P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$$

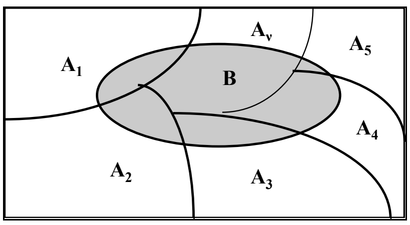
δηλαδή, αν A_1 και A_2 **ξένα μεταξύ τους**, τότε ισχύει

$$\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)}.$$

Από την έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας προκύπτει ο πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$ και από τις ισότητες αυτές οδηγούμαστε στον ορισμό των ανεξάρτητων ενδεχομένων. Δύο ενδεχόμενα λέγονται ανεξάρτητα, όταν η πληροφορία για την πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι $P(A \mid B) = P(A)$ και $P(B \mid A) = P(B)$, οπότε ο πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων γίνεται $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, εξίσωση με την οποία μπορούν να οριστούν και τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα, χωρίς μάλιστα τους περιορισμούς $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$.

Είναι σκόπιμο να εξηγηθεί με κατάλληλα παραδείγματα η μεγάλη χρησιμότητα του πολλαπλασιαστικού νόμου και των δεντροδιαγραμμάτων στην επίλυση προβλημάτων πιθανοτήτων.

Η εφαρμογή 2 της σελίδας 169 είναι ένα παράδειγμα εφαρμογής του τύπου της **ολικής πιθανότητας** και του **Θεωρήματος του Bayes** (Μπάγες) (1720-1761):



Αν $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι μια διαμέριση ενός δειγματικού χώρου Ω (δηλαδή τα ενδεχόμενα A_i, $i = 1,2,...,\nu$ είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι ο Ω), τότε για οποιοδήποτε ενδεχόμενο *B* ισχύει

$$B = \Omega \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_\nu) \cap B$$

$$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_\nu \cap B),$$

όπου τα $A_i \cap B,\ i = 1,2,...,\nu$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Επομένως,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_\nu \cap B)$$

και με εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού νόμου έχουμε

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + ... + P(A_\nu) \cdot P(B \mid A_\nu) \quad (1),$$

που είναι ο νόμος της ολικής πιθανότητας.

Επίσης, για κάθε *i* έχουμε $P(A_i \mid B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$. Αν στην ισότητα αυτή αντικαταστήσουμε την $P(B)$ με τη βοήθεια της (1) και λάβουμε υπόψη ότι $P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$, τότε προκύπτει ότι:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + ... + P(A_\nu) \cdot P(B \mid A_\nu)}$$

που είναι το θεώρημα του Bayes.

Επειδή οι μαθητές αναμένεται να συναντήσουν δυσκολίες σε προβλήματα δεσμευμένης πιθανότητας, πρέπει ο διδάσκων να τους διευκολύνει να “δουν” τη λύση με τη βοήθεια δεντροδιαγραμμάτων.

Γενικά, με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατακτήσουν το βασικό λεξιλόγιο της Θεωρίας των Πιθανοτήτων.
- Να κατανοήσουν την έννοια της πιθανότητας και να μπορούν να επιλύουν απλά προβλήματα πιθανοτήτων
- Να μπορούν να χρησιμοποιούν τις βασικές τεχνικές της Συνδυαστικής για την απαρίθμηση των στοιχείων του δειγματικού χώρου και των στοιχείων των ενδεχομένων.
- Να κατανοήσουν τις έννοιες της δεσμευμένης πιθανότητας και της ανεξαρτησίας των ενδεχομένων και να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από το Κεφάλαιο 3 **δε θα διδαχθεί** η παράγραφος 3.4 με τίτλο: **«Δεσμευμένη πιθανότητα-Ανεξάρτητα ενδεχόμενα»**.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ " ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ "

Κεφάλαιο 1

1. Β
2. Γ
3. Δ
4. Β
5. Γ
6. Δ
7. Γ
8. Δ
9. (0,0), (1,-1), (3,3)
10. (i) 0, (ii) 0, (iii) 2, (iv) Δεν υπάρχει, (v) 0, (vi) 3, (vii) 1
11. (i) -2, (ii) ±3, (iii) 2κπ±π/6
12. (α) -1, (β) -11, (γ) 8, (δ) -8
13. 28
14. (1)(β) (2)(δ) (3)(α) (4)(γ)

Κεφάλαιο 2

1. Λ
2. Σ
3. Λ
4. Λ
5. Λ
6. Σ
7. Λ (πολ/ζεται επί την $|c|$)
8. Σ
9. Λ
10 Λ
11. Σ
12. Λ
(αν $\hat{\beta} > 0$ αύξηση
αν $\hat{\beta} < 0$ μείωση)
13. Λ
14. Σ
15. Β
16. Δ
17. Α
18. Γ
19. Γ
20. Γ
21. Α
22. Β
23. Γ
24. Β
25. (α) (i), (β) (iii), (γ) (ii)
26. (α) (i), (β) (iv), (γ) (iii)
27. (α), (β), (στ)→(i), (γ), (δ), (ε)→(ii)
28. (β) (i), (β) (ii), (β) (iii)
29. (α) (ii), (β) (iii), (γ) (i),(δ) (ii), (ε) (ii)
30. (i) (β), (ii) (γ), (iii) (δ), (iv) (α)
31. (α) (iii), (β) (i), (γ) (ii)
32. (α) (ii), (β) (i), (γ) (iii)
33. (α) (iv), (β) (i), (γ) (iii), (δ) (ii)
34. (α) (i), (β) (iii), (γ) (ii)
35. (α) Σ, (β) Σ, (γ) Σ, (δ) Λ

Κεφάλαιο 3

1. Η έκφραση: μια "κεφαλή" και μια "γράμματα" περιλαμβάνει δυο περιπτώσεις , τις ΚΓ και ΓΚ.
2. Είναι μικρός ο αριθμός των δοκιμών, για να βγάλουμε ένα τέτοιο συμπέρασμα.
3. (α) Το κάθε ζάρι έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί (β) 3·6
4. (γ)
5. (β)
6. (δ)
7. (δ)
8. Σ
9. Λ
10. Λ
11. Λ
12. Λ
13. Σ
14. P(A∩ B)→0, P(A∪B) →0,8, P(A/B) →0, P(B/A) →0
15. P(A∩ B)→0,12, P(A∪B) →0,68, P(A/B) →0,6, P(B/A) →0,2
16. Όχι, διότι θα ισχύει P(A∪B)=1,3, που είναι άτοπο.

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΕΠΑ.Λ.

ΩΡΟΛΟΓΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Α΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑ.Λ.

ΑΛΓΕΒΡΑ: Ώρες 2 εβδομαδιαίως

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ: Ώρες 2 εβδομαδιαίως

Η διδασκαλία θα προσαρμοστεί σύμφωνα με την ύλη της Α΄τάξης του ημερήσιου ΕΠΑ.Λ.

ΩΡΟΛΟΓΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑ.Λ.

ΑΛΓΕΒΡΑ: Ώρες 1 εβδομαδιαίως

Από την Άλγεβρα της Β΄ τάξης του ημερήσιου ΕΠΑ.Λ., θα διδαχθούν τα Κεφάλαια:
1^{o}.Τριγωνομετρία (μέχρι 17 ώρες)
2^{o}. Πολυώνυμα- Πολυωνυμικές εξισώσεις (μέχρι 12 ώρες)

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ: Ώρες 1 εβδομαδιαίως

Η διδασκαλία θα προσαρμοστεί σύμφωνα με την ύλη της Β΄τάξης του ημερήσιου ΕΠΑ.Λ.

´

´

ΩΡΟΛΟΓΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑ.Λ.

ΑΛΓΕΒΡΑ: Ώρες 1 εβδομαδιαίως

Από την Άλγεβρα της Β΄ τάξης του ημερήσιου ΕΠΑ.Λ., θα διδαχθούν τα Κεφάλαια:
3^{o}. Πρόοδοι (μέχρι 10 ώρες)
4^{o}. Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση (μέχρι 12 ώρες)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ &ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
Ώρες 2 εβδομαδιαίως

Από τα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Β΄ τάξης του ημερήσιου ΕΠΑ.Λ. θα διδαχθούν τα Κεφάλαια **1** έως και **3,** σύμφωνα με την ύλη της Β΄τάξης του ημερήσιου ΕΠΑ.Λ.

ΩΡΟΛΟΓΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι: Ώρες 5 εβδομαδιαίως

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ: Ώρες 5 εβδομαδιαίως

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ: Ώρες 2 εβδομαδιαίως

Η διδασκαλία θα προσαρμοστεί σύμφωνα με την ύλη της Γ΄ τάξης του ημερήσιου ΕΠΑ.Λ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ :

- Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.
- Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις. Μπορούν όμως να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.
- Εξαιρούνται από την διδακτέα - εξεταστέα ύλη οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογαρίθμους με βάση διαφορετική του e και του 10.