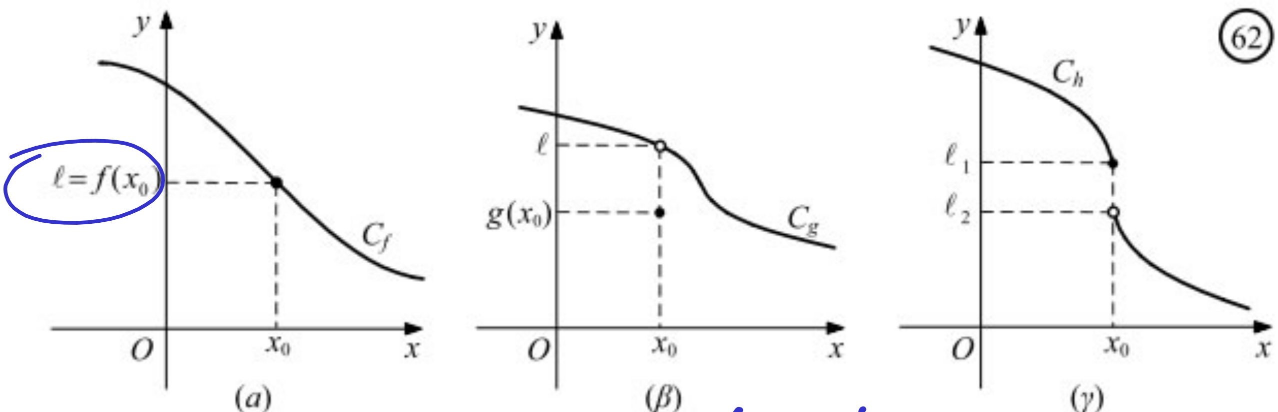
Σχόλια στη συνέχεια!

1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός της συνέχειας

Η συνέχεια ορίζεται σε σημείο!

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Όριο = τιμή

Όριο ≠ τιμή

$\text{Όριο}^- \neq \text{όριο}^+$

ΟΡΙΣΜΟΣ (συνέχεια σε σημείο)

$x_0 \in D_f$

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

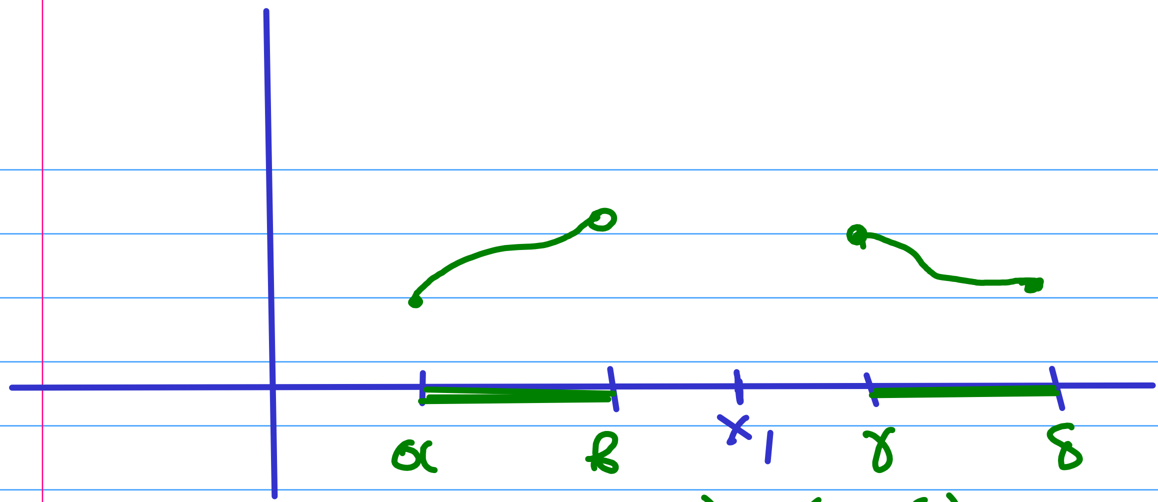
Πρέπει να υπάρχει δ>0 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq D_f$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν :

α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0

Συνεχής σημαίνει συνεχόμενη γραμμή στο πεδίο ορισμού της



$D_f = (α, β) \cup (γ, δ)$

f συνεχής στο D_f !

Στο $x_1 \notin D_f$ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΝΟΗΜΑ να αναφερθούμε στη συνέχεια.

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**. (συνέχεια στο D_f)

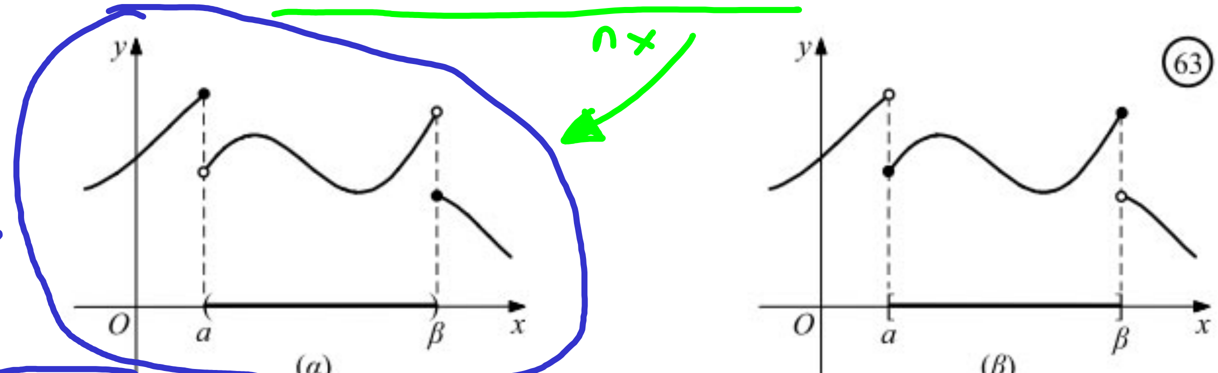
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β). (Σχ. 63α) (συνέχεια σε ΔΙΑΣΤΗΜΑ)

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta) \quad (\Sigma\chi.\ 63\beta)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! ΟΧΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΕΝΩΣΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ! ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΠΟΥΘΕΝΑ!

πχ



f συνεχής στο (α, β) ΑΛΛΑ ΟΧΙ ΣΥΝΕΧΗΣ σε D_f

Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής (α, β] , [α, β) .

ΓΝΩΣΤΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

— **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής** , αφού για κάθε $x_0 \in$ **R** ισχύει .

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

— **Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής** , αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— **Οι συναρτήσεις f(x) = ημx και g(x) = συνx είναι συνεχείς** , αφού για κάθε $x_0 \in$ **R** ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

— **Οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$ είναι συνεχείς.**

θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο και οι συναρτήσεις:

$$f+g, \quad c\cdot f, \text{ όπου } c\in \mathbb{R}, \quad f\cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f| \text{ και } \sqrt[\nu]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

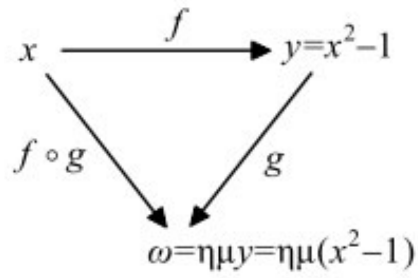
— Οι συναρτήσεις **f(x) = εφx και g(x) = σφx** είναι **συνεχείς** ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

— Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3x-2}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $[2/3, +\infty)$, αφού η συνάρτηση
g(x) = 3x−2 είναι συνεχής.

θεώρημα

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 $\in D_f$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ $\in D_g$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0 $\in D_{gof}$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\varphi(x) = ημ(x^2 - 1)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = ημx$.



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

συνεχής σε διάστημα = συνεχόμενη γραμμή

$A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ εκατέρωθεν x'x

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

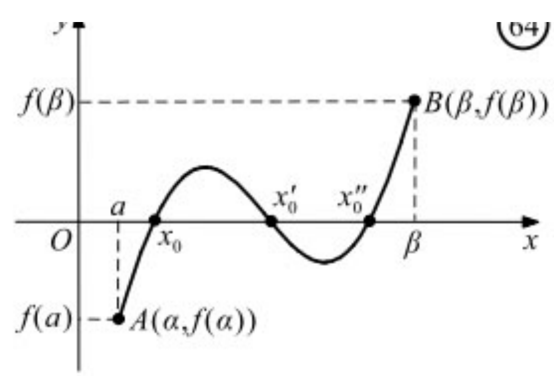
$$f(x_0) = 0.$$

$C_{f(\alpha,\beta)}$ "κόβει" x'x

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

Γεωμετρική ερμηνεία

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β]. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x'x, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.



ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΤΟΥ BOLZANO! Δηλαδή η μή εξασφάλιση ρίζας μέσω αυτού, ΔΕΝ συνεπάγεται ότι η συνάρτηση δεν έχει ρίζα στο διάστημα αυτό.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ BOLZANO

$f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ και $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to \beta^-} f(x) = -\infty$ ή ανάποδα, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$

Απαιτείται απόδειξη;

$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = +\infty$ άρα από ιδιότητες ορίων η f έχει θετικό πρόσημο κοντά στο α, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$: $f(x) > 0$ $\forall x \in (\alpha, \alpha+\delta)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \alpha+\delta)$ ώστε $f(x_1) > 0$

Ομοίως υπάρχει x_2 κοντά στο β με $x_2 > x_1$ ώστε

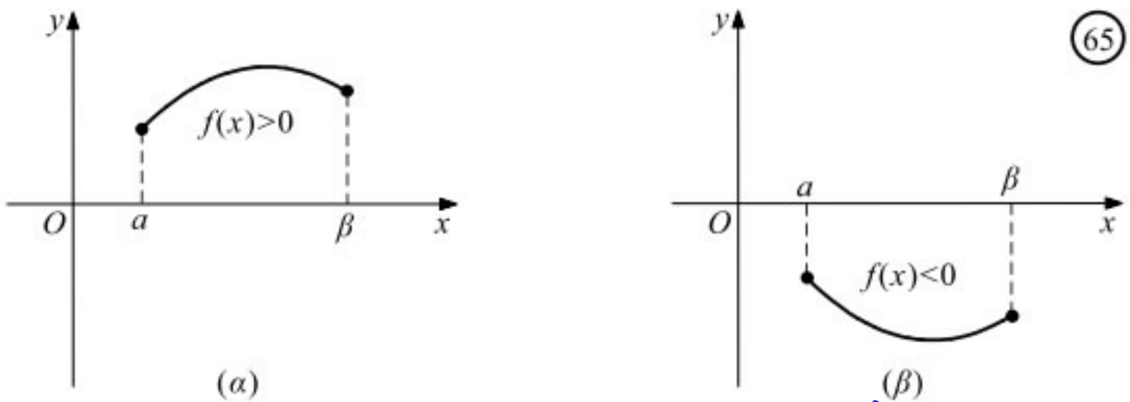
$$f(x_2) < 0$$

Συνεπώς $f(x_1) f(x_2) < 0$ και f συνεχής $[x_1, x_2]$ άρα από ΘΒ υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$

ΣΧΟΛΙΟ Διατήρηση προσήμου

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

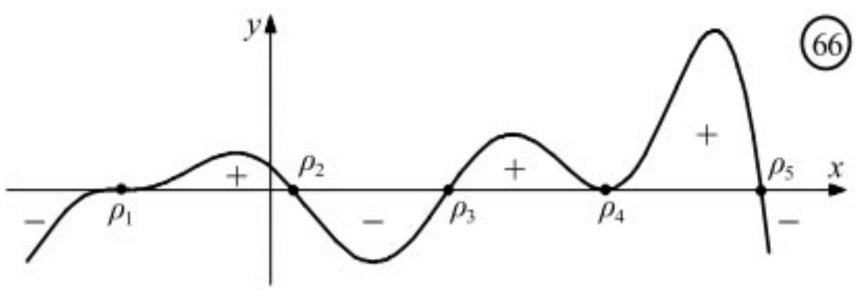
— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x ϵ Δ ή είναι αρνητική για κάθε x ϵ Δ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σχ. 65)



Διατήρηση προσήμου μεταξύ διαδοχικών ριζών

— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

πρέπει να τις ξέρουμε ΟΛΕΣ



Εύρεση Προσήμου συνεχούς f

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

ΔΕΝ μπορούμε για όλες τις συναρτήσεις να βάλουμε τις ρίζες τους στη σειρά!

πχ Ποια είναι η επόμενη ρίζα της $x=0$ για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \end{cases}$;

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano και είναι γνωστό ως θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι :

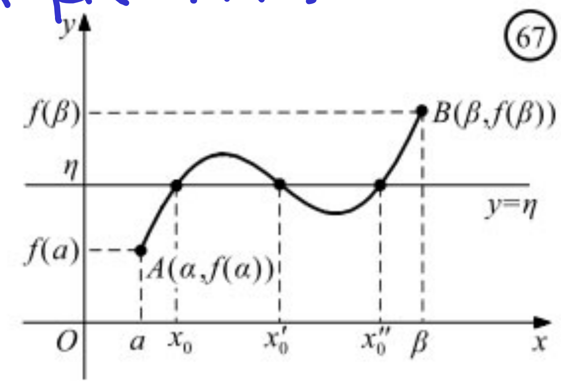
μεταφέρουμε C_f κατά αριθμό η, ώστε να έχει τομή με $x'x$.

- η g είναι συνεχής στο [α, β] και
- $g(\alpha)\, g(\beta) < 0$,

αφού

$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και

$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

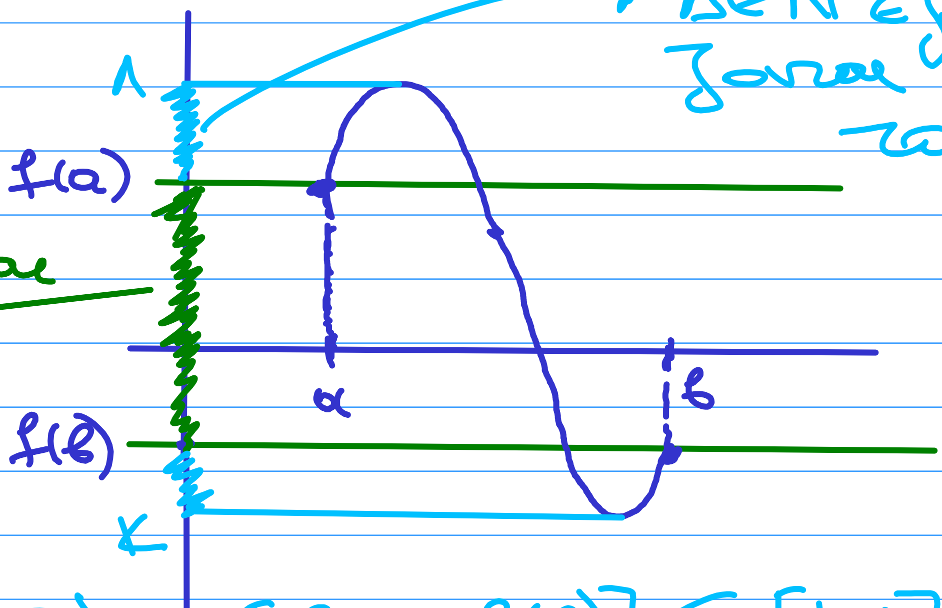


Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■

Η συνεχής f στο [α,β] με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ μπορεί να λαμβάνει κι άλλες τιμές εκτός αυτών που εξασφαλίζει το ΘΕΤ: $[f(\alpha), f(\beta)]$

ΔΕΝ εξασφαλίζονται από το ΘΕΤ

πχ:



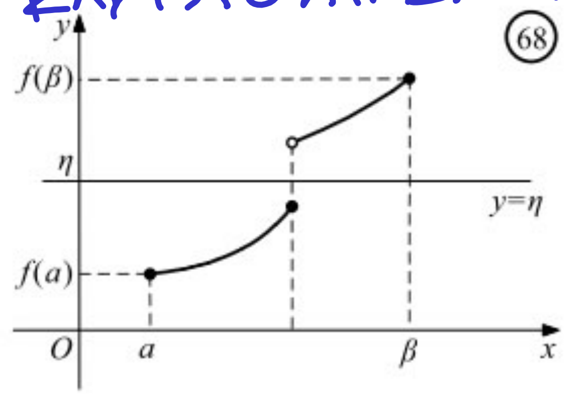
εξασφαλίζονται από ΘΕΤ

Δηλαδή $[f(\alpha), f(\beta)] \subset [\kappa, \lambda] = f(D_f)$

ΣΧΟΛΙΟ $\left\{\begin{array}{l}\text{αναγκαιότητα}\\ \text{συνέχειας}\end{array}\right.$ ΘΕΤ σε κλειστό διάστημα

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

68



"ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ" ΘΕΤ σε τυχαίο διάστημα Δ

Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

μπορεί $\Delta = (\alpha,\beta)$ ή $[\alpha,\beta)$ ή $(\alpha,\beta]$ ή $[\alpha,\beta]$

το f(Δ) όχι απαραίτητα ίδιας μορφής με Δ

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

> Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β] , τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. (Σχ. 69δ)

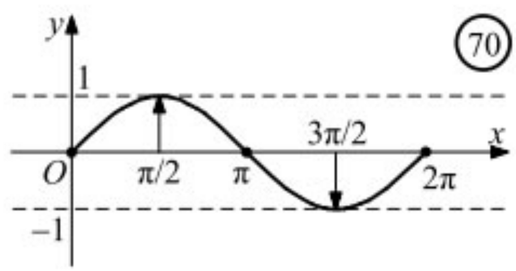
Δηλαδή, υπάρχουν x_1 , x_2 ϵ [α, β] τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\mathbf{m \le f(x) \le M, \quad \text{για κάθε} \quad x \in [\alpha, \beta]}.$$

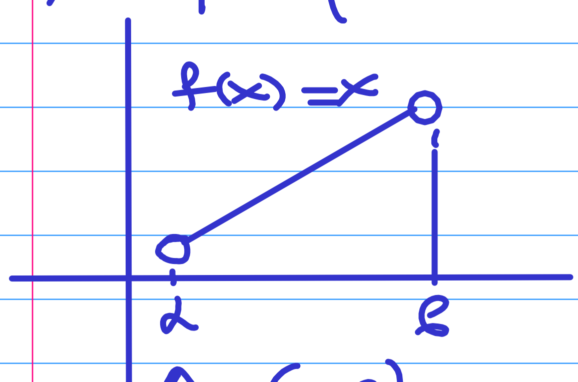
ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [α, β] είναι το κλειστό διάστημα **[m, M]** , όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

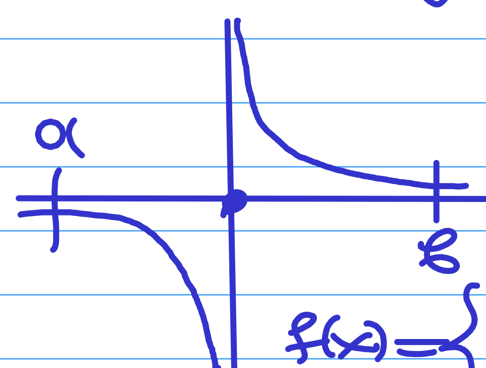
Για παράδειγμα, η συνάρτηση f(x) = ημx, x ϵ [0, 2π] έχει σύνολο τιμών το [−1,1] , αφού είναι συνεχής στο [0, 2π] με m = −1 και M = 1.



Αν η f όχι συνεχής σε ολόκληρο το [α,β] μπορεί να μην έχει ακρότατα!



$\Delta = (\alpha, \beta)$



$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$D_f = [\alpha, \beta]$

$\alpha < 0 < \beta$

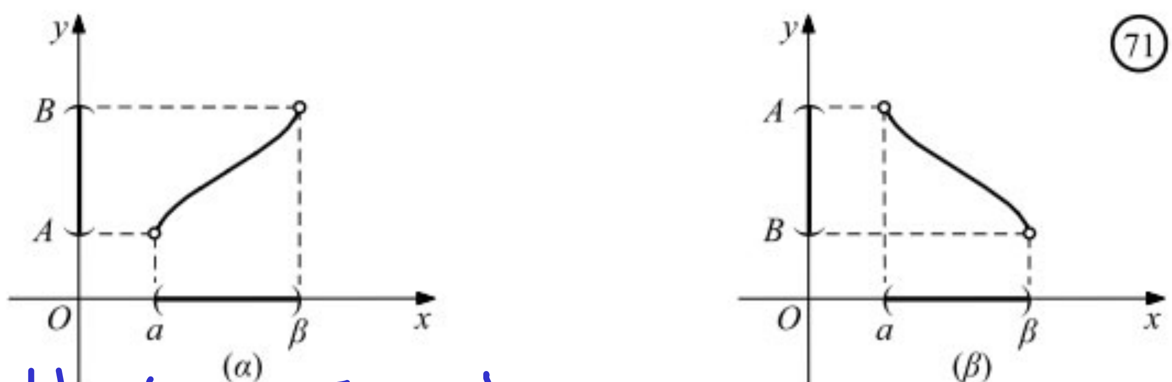
Εύρεση συνόλου τιμών συνεχούς - μονότονης σε διάστημα

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β) (Σχ. 71α), όπου

$$A=\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B=\lim_{x\to\beta^-} f(x)$$

οι Α, Β μπορεί να είναι και $\pm\infty$

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Β, Α) (Σχ. 71β).



- Η ύπαρξη μέγιστης και ελάχιστης τιμής μπορεί να είναι ιδιαίτερα βοηθητική και σε συνδυασμό με τα άλλα θεωρήματα εξαιρετικά χρήσιμη.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_1} f(x)=-\infty$ και f συνεχής στο Δ με $x_0, x_1 \in \Delta$ τότε $f(\Delta)=\mathbb{R}$, διότι $f(\Delta)$ διάστημα με $\pm\infty$ να περιέχονται σ' αυτό.