ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ- ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΔΕΝ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΟΝΤΑΙ ΠΑΝΤΑ. ΔΕΙΤΕ ΟΔΗΓΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑΣ ΥΛΗΣ!

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

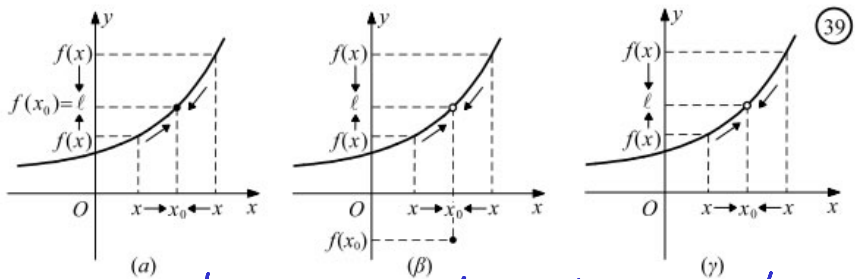
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

πρέπει η συνάρτηση να ορίζεται κοντά $x_0 \in \mathbb{R}$ με x_0 ΟΧΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ στο D_f

και διαβάζουμε

"το όριο της f(x), όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ " ή

"το όριο της f(x) στο x_0 είναι ℓ ".



Συνεχής $x_0 \in D_f$ Ασυνεχής $x_0 \in D_f$ $x_0 \notin D_f$

ΣΧΟΛΙΟ

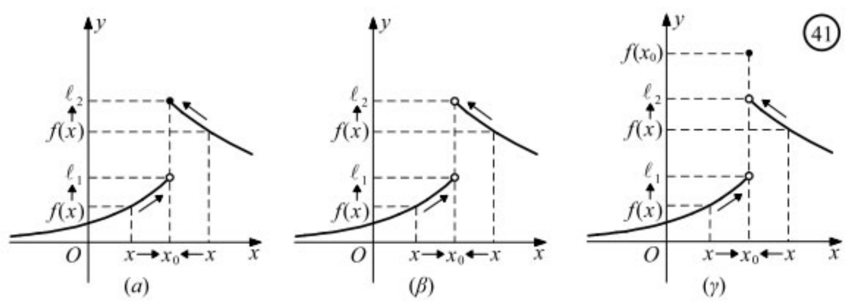
Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

— Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής

$$D_f = \boxed{(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \quad \text{ή} \quad (\alpha, x_0) \quad \text{ή} \quad (x_0, \beta).}$$

— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

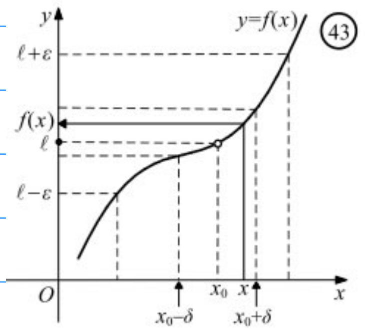


Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell}$$

Ορισμός του ορίου στο $x_0 \in R$ (Ο ορισμός μόνο εκτός ύλης)



Συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

(α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$

(β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$

ΣΧΟΛΙΟ

$(x_0-\delta, x_0)$ με $\delta>0$

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0,β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

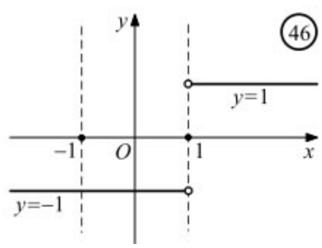
↳ $(x_0, x_0+\delta)$, $\delta>0$

Έτσι για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0 = 0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1, 0)\cup(0, 1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη

ή σε ακόμα μικρότερο πχ $\left(-\frac{1}{n}, 0\right)\cup\left(0, \frac{1}{n}\right)$ για $n\in\mathbb{N}^*$

μορφή

$$f(x)=\frac{-(x-1)}{x-1}=-1\,.$$



Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, το

ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

ΣΥΜΒΑΣΗ

Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα P θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P.

β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).

γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).

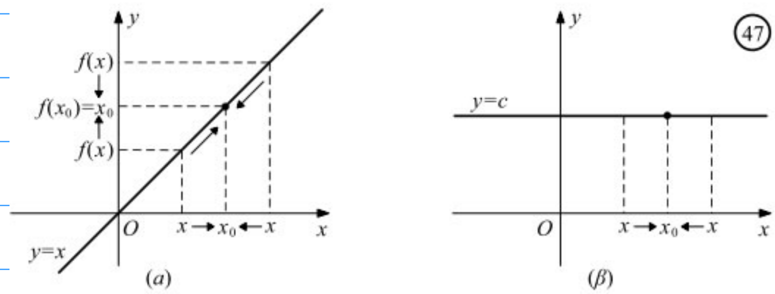
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι θετική κοντά στο $x_0 = 0$, αφού ορίζεται στο σύνολο
$(-\pi/2, 0)\cup(0, \pi/2)$ και είναι θετική σε αυτό.

Όριο ταυτοτικής

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} x = x_0}$$

Όριο σταθερής

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} c = c}$$



Όριο και διάταξη

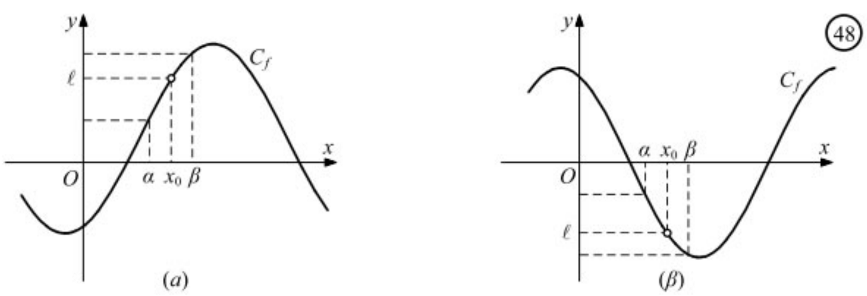
Για το όριο και τη διάταξη αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48α)
- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48β)

αν έχει ισότητα εδώ δεν ισχύει η συνεπαγωγή

πχ $f(x) = x$
$x_0 = 0$



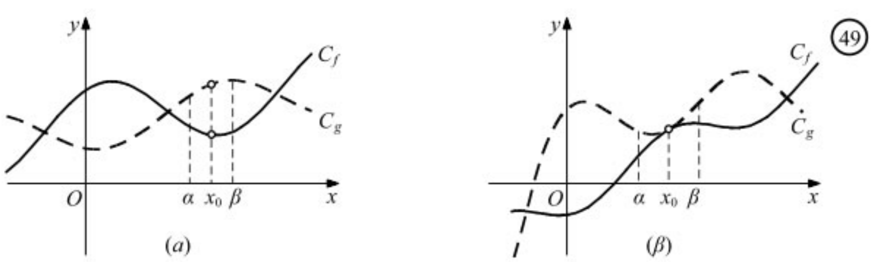
ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

αναγκαία η ύπαρξη!

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$$

εδώ μπορεί να έχουμε γνήσια ανισότητα, αλλά στο συμπέρασμα όχι πάντα.
πχ σχ. 49



Γενικά μπορεί και $x_0 = \pm\infty$ σε όλες τις ιδιότητες των ορίων, εφόσον ορίζονται οι συναρτήσεις σε κατάλληλα διαστήματα και οι πράξεις δεν οδηγούν σε απροσδιόριστη μορφή.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Όταν δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε μία ιδιότητα, δε σημαίνει ότι δεν υπάρχουν τα όρια, που θα προέκυπταν αν εφαρμοζόταν. Αυτό ισχύει και γενικότερα σε όποια θεωρήματα ΔΕΝ είναι ισοδυναμίες. πχ Rolle, Bolzano, κλπ.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΟΡΙΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΥΠΑΡΞΗ

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbf{R}$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$
6. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $\boxed{f(x)\geq 0 \text{ κοντά στο } x_0}$

$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $\quad g(x) = -\dfrac{x}{|x|}$

τα $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = -1$

ΠΡΟΣΟΧΗ μην ξεχαστούν ειδικά σε θεωρητικές ασκήσεις όπου δεν θα προκύψει αριθμός

Οι ιδιότητες 1 και 3 του θεωρήματος ισχύουν και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις. Άμεση συνέπεια αυτού είναι:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[f(x)]^\nu = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^\nu, \quad \nu\in \mathrm{N}^*}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} x^\nu = x_0^\nu.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \text{εφόσον} \quad Q(x_0)\neq 0}$$

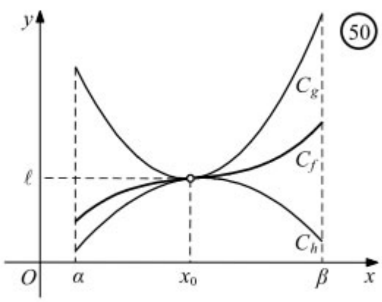
ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Γενικά, η αντικατάσταση του ορίου με τιμή της συνάρτησης μπορεί να γίνει μόνο όταν είναι συνεχής η συνάρτηση αυτή! Βέβαια πρέπει να πληρεί και τις όποιες άλλες προϋποθέσεις.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν $Q(x_0) = 0$, τότε δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα 4 του παραπάνω θεωρήματος.

Κριτήριο παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι "κοντά στο x_0" μια συνάρτηση f "εγκλωβίζεται" (Σχ. 50) ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g. Αν, καθώς το x τείνει στο x_0, οι g και h έχουν κοινό όριο ℓ, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η f θα έχει το ίδιο όριο ℓ. Αυτό δίνει την ιδέα του παρακάτω θεωρήματος που είναι γνωστό ως **κριτήριο παρεμβολής**.



ΘΕΩΡΗΜΑ όχι αντίστροφο!

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

ισχύει και για γνήσια ανισότητα

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

$x_0 \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$, γνωστή ύπαρξη

τότε

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$. όχι αναγκαία γνωστή ύπαρξη

- Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$
- Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

$\lvert ημx \rvert \le x$, για κάθε x ϵ **R** (η ισότητα ισχύει μόνο όταν x = 0)	• $\lim_{x\to x_0} ημx = ημx_0$ • $\lim_{x\to x_0} συνx = συνx_0$	• α) $\lim_{x\to 0} \frac{ημx}{x} = 1$ • β) $\lim_{x\to 0} \frac{συνx-1}{x} = 0$

χρήσιμη σε ανισότητες και κ.τ.λ.

Όριο σύνθετης συνάρτησης

Με τις ιδιότητες που αναφέρουμε μέχρι τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τα όρια απλών συναρτήσεων. Αν, όμως, θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης fog στο σημείο x_0, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε u = g(x).

2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ και

3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u\to u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \ne u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει: [redacted]

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u)}$$

Προσοχή για εφαρμογή ορισμού ορίου ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αντιπαράδειγμα

$f(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$(f\circ f)(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \ne 0 \end{cases}$

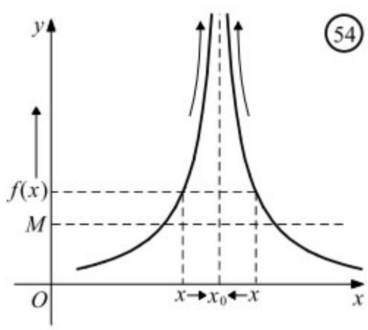
ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του βιβλίου τα όρια της μορφής $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$ με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη: "$g(x) \ne u_0$ κοντά στο x_0" και γιαυτό δεν θα ελέγχεται.

1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_0 ϵ R

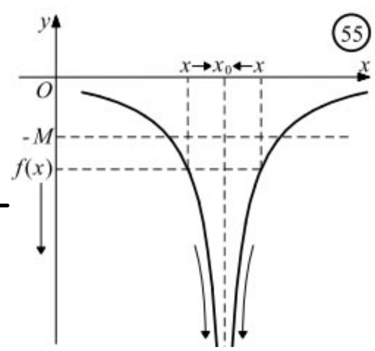
— Στο σχήμα 54 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα x′x πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές f(x) αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό Μ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ και γράφουμε

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty}$$



— Στο σχήμα 55 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα x′x πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές f(x) ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό −Μ (Μ >0). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $-\infty$ και γράφουμε

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty}$$



Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty .$$

Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες :

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ

  αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(-f(x)) = -\infty$, ενώ

  αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(-f(x)) = +\infty$.

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν

  $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

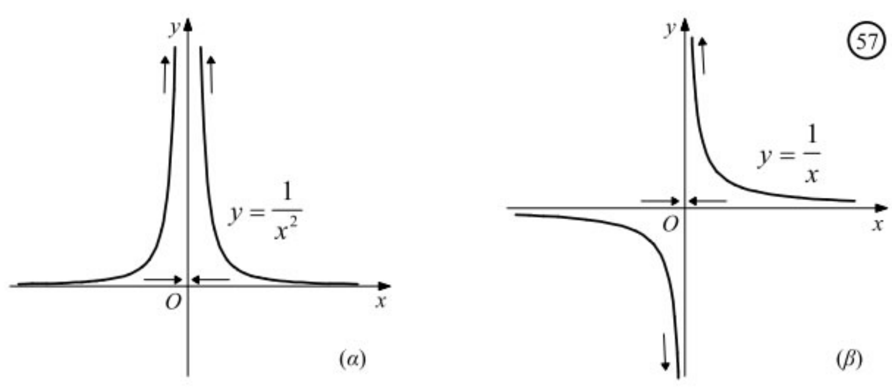
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

Στο συμπέρασμα είναι και ύπαρξη

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές έχουμε:

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$, $\nu \in \mathbf{N}^*$ (Σχ. 57α)



$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, $\nu \in \mathbf{N}$

ενώ

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, $\nu \in \mathbf{N}$ (Σχ. 57β).

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu \in \mathbf{N}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \mathbf{R}$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \mathbf{R}$,										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f{\cdot}g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

Δεν ορίζει πράξεις μορφής

~~$(+\infty)+\alpha=+\infty$ με $\alpha \in \mathbb{R}$~~

ΔΕΣ πως τα γράφει στα λυμένα παραδείγματα

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)+(-\infty) \quad \text{και} \quad 0\cdot(\pm\infty).$$

Επειδή $f-g=f+(-g)$ και $\dfrac{f}{g}=f\cdot\dfrac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty) \quad \text{και} \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Για παράδειγμα:

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

ενώ,

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, τότε έχουμε :

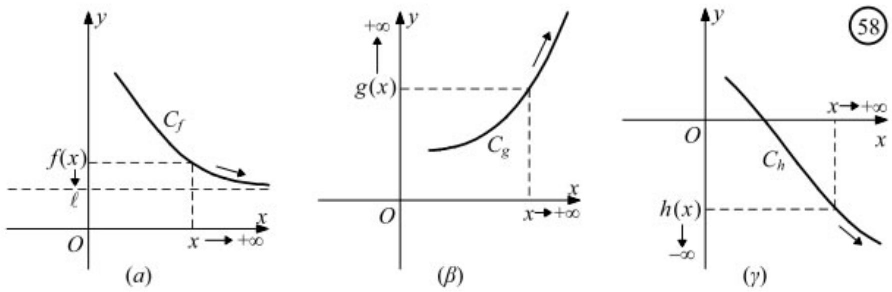
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}1=1.$$

1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g, h σε ένα διάστημα της μορφής (α, +∞).



Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο,

— το f(x) προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο +∞ όριο το ℓ και γράφουμε

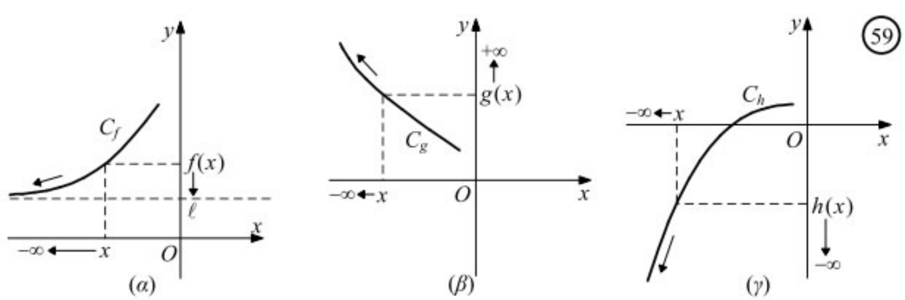
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$$

— το g(x) αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η g έχει στο +∞ όριο το +∞ και γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο +∞, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (α,+∞).
Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν x → −∞ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (−∞, β). Έτσι, για τις συναρτήσεις f, g, h των παρακάτω σχημάτων έχουμε:



$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} h(x)=-\infty .$$

Για τον υπολογισμό του ορίου στο +∞ ή −∞ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} x^\nu=+\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\nu}=0, \qquad \nu\in\mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^\nu=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^\nu}=0, \qquad \nu\in\mathbb{N}^*$$

Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και

— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)=\lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x)=\lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

Για την ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0}$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\kappa \neq 0$ ισχύει :

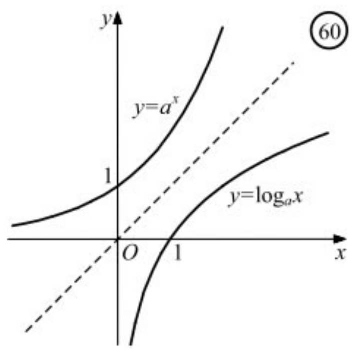
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$

Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

- Αν $\alpha>1$ (Σχ. 60), τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x=0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x=+\infty$$

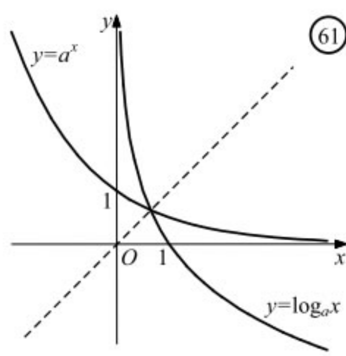
$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x=+\infty$$



- Αν $0<\alpha<1$ (Σχ. 61), τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x=0$$

$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x=-\infty$$



για αυτά θυμήσου τα σχήματα

Πεπερασμένο όριο ακολουθίας

Η έννοια της ακολουθίας είναι γνωστή από προηγούμενες τάξεις. Συγκεκριμένα :

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell \in \mathbf{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$,
υπάρχει $\nu_0 \in \mathbf{N}^*$, τέτοιο ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει

$$|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$$

Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων όταν $x \to +\infty$, που μελετήσαμε στα προηγούμενα, ισχύουν και για τις ακολουθίες. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων αυτών μπορούμε να υπολογίζουμε όρια ακολουθιών.

Για παράδειγμα,

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{2\nu^2 - 3\nu + 5}{4\nu^2 + \nu - 1} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{2\nu^2}{4\nu^2} = \frac{1}{2}.$$